التمرين الأول

أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-1-\frac{1}{3}x}{x^2}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{E\left(\sqrt{x}\right)}{x+1}$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x-\tan^2 x}}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x+1}{x^{p+1}-x^p+x-1}$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}+a-x}{\sqrt{a-x}+\sqrt{a^2-x^2}}$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{x}\,E\left(\dfrac{3}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\sin(\cos x)}$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}+\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(2+\sqrt{x}\right)\sqrt{2-x}-3}{x^2-1}$

التمرين الثاني

نضع $f(x)=x^2\left(E\left(\dfrac{1}{x}\right)+E\left(\dfrac{2}{x}\right)\right)$

1) بين أن $\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right)\quad 3x-2x^2<f(x)\leq x^2$

2) استنتج $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

التمرين الثالث

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{x-E(x)}{x+E(x)}$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

2) أ- بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=1$

ب- هل الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة 0

3) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ وحدد $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

التمرين الرابع

نضع $f(x)=xE\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ و ليكن k من $\mathbb{N}^*-\{1\}$

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) أ- بين أن $f(x)=x\quad\left(\forall x\in\left]\dfrac{1}{4},1\right[\right)$ و حدد $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)$

ب- أحسب النهاية $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)$

3) بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=0$

4) أ- بين أن $f(x)=(k-1)x\quad\left(\forall x\in\left]\dfrac{1}{k^2},\dfrac{1}{(k-1)^2}\right[\right)$

ب- أدرس نهاية الدالة f عند النقطة k

التمرين الأول

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=1+\sin x-x$

1) بين ان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) أدرس تغيرات الدالة f

3) بين أن المعادلة $x-\sin x=1$ تقبل حلا وحيدا α ثم قارن α و العدد $\dfrac{\pi}{2}$

التمرين الثاني

1) لتكن f دالة متصلة على المجال $[a,b]$ بين أن : $f(\beta)=kf(a)+(1-k)f(b)$ $\quad(\forall k\in]0,1[)(\exists\beta\in[a,b])$

2) لتكن g دالة متصلة على المجال $[a,b]$ و بحيث $g(a)=g(b)$ بين أن $g(\alpha)=g\left(\alpha+\dfrac{b-a}{2}\right)$ $\quad(\exists\alpha\in[a,b])$

3) لتكن f دالة متصلة على المجال $[0,1]$ و بحيث $f([0,1])\subseteq[1,2]$ بين أن $f(\beta)=\dfrac{1}{\beta}$ $\quad(\exists\beta\in]0,1[)$

4) لتكن f دالة متصلة على المجال $[1,2]$ بين : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}+\dfrac{\sin\alpha}{\alpha-2}$ $\quad(\exists\alpha\in]1,2[)$

التمرين الثالث

ليكن n عددا طبيعيا بحيث $n\geq 2$. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x^{n+1}-2x^{n}+1$

1) أ- أدرس منحى تغيرات الدالة f

ب- استنتج أن $f\left(\dfrac{2n}{n+1}\right)<0$

2) بين أن : $f(\alpha)=0$ $\quad\left(\exists\alpha\in\left]\dfrac{2n}{n+1},1\right[\right)$

التمرين الرابع

1) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,1]$ بما يلي : $f(x)=2\sqrt{1-x^{2}}$. بين أن f تقابل من المجال $[0,1]$ نحو مجال J يتم تحديده و عرف دالتها العكسية

2) نضع $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

أ- حدد D_f و أحسب نهايات الدالة f عند محدات D_f

ب- أدرس تغيرات الدالة f ثم ضع جدول تغيراتها

ج- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[0,1[$ بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J يتم تحديده و عرف تقابله العكسي

التمرين الأول

بين ما يلي : $\arctan\frac{3}{2}-\arctan\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}$ ، $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)=\arctan\left(\frac{120}{119}\right)$

$4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{70}+\arctan\frac{1}{99}=\frac{\pi}{4}$ ، $\arctan 2012-\arctan\frac{2011}{2013}=\frac{\pi}{4}$

المرين الثاني

أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to+\infty} x\arctan\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ ، $\lim_{x\to-\infty} x\left(\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)-\frac{\pi}{4}\right)$ ، $\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{\arctan|x|-\frac{\pi}{4}}}{x+1}$

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2+x+1}-\sqrt{x-1}$ ، $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x}$ ، $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{2x+5}}$

$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt[4]{x^4+1}\right)$ ، $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^2+60}}}{\sqrt{x^2-\sqrt[3]{x^2+60}}}$ ، $\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt[4]{x^4+1}\right)$

التمرين الثالث

حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $\arctan x+\arctan x^2=-\frac{\pi}{4}$ 2) $\sqrt[3]{x+\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}$

3) $\sqrt[3]{(x+1)^2}+4\sqrt[3]{(x-1)^2}=4\sqrt[3]{1-x^2}$ 4) $\frac{\sqrt[n]{x+3}}{x}+\frac{\sqrt[n]{x+3}}{3}=\frac{\sqrt[n]{x}}{5}$

التمرين الرابع

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ بمايلي : $f(x)=\sin x$

1) بين أن f تقابل من I نحو مجال J بتم تحديده و لتكن f^{-1} تقابله العكسي

2) بين أن $f^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}-2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ $\left(\forall x\in\left]-1,1\right[\right)$

المرين الخامس

لتكن f دالة معرفة بما يلي : $f(x)=2\arctan\frac{2\sqrt{x}}{x+1}$

1- حدد D_f و أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

2- أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0

3- أحسب $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

4- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[1,+\infty[$

أ- بين أن g تقابل من $[1,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده

ب- بين أن $\sqrt{x}=\tan\alpha$ $\left(\exists!\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\right)$ $(\forall x\in I)$ ثم عرف الدالة العكسية g^{-1}

5- بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1,2]$

6- أرسم في نفس المعلم المنحين $\Gamma_{g^{-1}}$; C_f