التمرين الأول

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^3+8} \quad ، \quad \lim_{x\to +\infty} x+\sqrt{x^2-x} \quad ، \quad \lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+2}+2x \quad ، \quad \lim_{x\to +\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}-3}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2-x+2}-x \quad ، \quad \lim_{x\to 1}\frac{x+\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{x}-x} \quad ، \quad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{4-x}-1}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin 3x}{2x} \quad ، \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\sin x}}{x^2\sqrt{x}} \quad ، \quad \lim_{x\to \frac{1}{2}}\left(2x^2-3x+1\right)\tan\left(\pi x\right) \quad ، \quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{3}E\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{x}\,E\left(\frac{1}{x}\right) \quad ، \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2} \quad ، \quad \lim_{x\to -2}\frac{2\sqrt{2-x}-\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{1-4x}-\sqrt{x+11}}$$

التمرين الثاني

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & ; \quad x<0 \\ f(0)=0 & \\ f(x)=\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\sqrt{x}} & ; \quad x>0 \end{cases}$$

1) بين أن f متصلة على يسار $x_0=0$

2) هل الدالة f متصلة في النقطة $x_0=0$ ؟

التمرين الثالث

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=xE\left(\dfrac{1}{x}\right) & ; \quad x<0 \\ f(0)=0 & \\ f(x)=\dfrac{x-E(x)}{\sqrt{x}} & ; \quad x>0 \end{cases}$$

1) بين أن f متصلة على يمين $x_0=0$

2) هل الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة $x_0=0$ ؟

التمرين الرابع

نعتبر الدالة $x\neq 0\ ;\quad f(x)=x\sqrt{\left(1+E\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^2+1}$ و $f(0)=1$

1) بين أن $\sqrt{x^2+1}\leq f(x)\leq\sqrt{2x^2+2x+1}$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\right)$ ثم استنتج أن f متصلة على يمين $x_0=0$

2) هل الدالة f متصلة في النقطة $x_0=0$ ؟

التمرين الخامس

1) لتكن f دالة متصلة على $[0,1]$ و بحيث $f(1) \geq 0$ بين أن : $\left(\exists c \in \left]0,1\right]\right) : 1-c = c^2 f(c)$

2) لتكن f دالة متصلة من $[0,1]$ نحو $[0,1]$ بين أن: $\left(\exists \beta \in [0,1]\right) : f(\beta) + f(1-\beta) = 2\beta$

3) لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$ و لتكن $x_1, x_2 ... x_n$ n عنصر من المجال $[a,b]$

بين أن: $\left(\exists \alpha \in [a,b]\right) : \ f(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f(x_k)$

4) لتكن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ وبحيث : $(\exists a \in \mathbb{R}) : (f \circ f)(a) = a$ بين أن f تقبل على الأقل نقطة صامدة

التمرين السادس

1) أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan \sqrt{x^2+x}}{x}$ ، $\lim_{x \to 2^+} (x-2)\arctan \frac{1}{x-2}$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right)$ ، $\lim_{x \to 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x-1}$ و استنتج $\lim_{x \to 1} \frac{x\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x-1}$

2) أ- بين أن : $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ و أحسب $b = \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{2}{3}$

ب- بين أن $\arctan \frac{1}{7} + 2\arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ و $\arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

3) أ- بين أن : $2\arctan\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + \arctan x = \frac{\pi}{2}$

ب- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4}$

ج- بين أن : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right) \arctan(x+1) - \arctan x = \arctan \frac{1}{x^2+x+1}$ ثم بسط التعبير $\sum_{k=1}^{k=n} \arctan \frac{1}{k^2+k+1}$

التمرين السابع

أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{x-1}-1}$ ، $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{3x+4} - \sqrt{2+x}}{x+1}$ ، $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1}+2}{\sqrt[4]{x+3\sqrt{x}}}$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt[3]{x^3+1}$ ، $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2+1} + 3x$ ، $\lim_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+1}\right)$

$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - 1}$ ، $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[6]{x} - \sqrt{x-1}}$ ، $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}} \sqrt[12]{x}$ ، $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x-1}$