

سلسلة 4	المتتاليات العددية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	
		$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \end{cases} ; n \geq 0$ تمرين 1 :	
	<p>لنبين بالترجع أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 3$</p> <p>■ بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن: $u_0 = 4$ و $4 > 3$</p> <p>■ نفترض أن $u_n > 3$ و نبين أن $u_{n+1} > 3$</p> <p>لدينا: $u_{n+1} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3 - 3u_n - 6}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3u_n - 9}{u_n + 2}$</p> <p>لنعمل الحدودية: $2t^2 - 3t - 9$، محددها هي: $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-9) = 9 + 72 = 81$</p> <p>منه: $t_1 = \frac{3-9}{4} = -\frac{3}{2}$ و $t_2 = \frac{3+9}{4} = 3$</p> <p>منه: $2t^2 - 3t - 9 = 2(t - t_1)(t - t_2) = 2\left(t + \frac{3}{2}\right)(t - 3) = (2t + 3)(t - 3)$</p> <p>منه: $u_{n+1} - 3 = \frac{(2u_n + 3)(u_n - 3)}{u_n + 2}$ ولدينا حسب الافتراض: $u_n > 3$ أي $u_n - 3 > 0$</p> <p>إذن: $u_{n+1} - 3 > 0$ أي $u_{n+1} > 3$</p> <p>بالتالي وحسب مبدأ الترجع فإن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 3$</p>	1	
	<p>لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - u_n = \frac{2u_n^2 - 3 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{u_n^2 - 2u_n - 3}{u_n + 2}$</p> <p>لنعمل الحدودية: $t^2 - 2t - 3$، محددها هي: $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$</p> <p>منه: $t_1 = \frac{2+4}{2} = 3$ و $t_2 = \frac{2-4}{2} = -1$ منه: $t^2 - 2t - 3 = 1(t - t_1)(t - t_2) = (t + 1)(t - 3)$</p> <p>منه: $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n + 1)(u_n - 3)}{u_n + 2} > 0$ (لأن: $u_n > 3$) بالتالي u_n تزايدية قطعاً</p>	2	
	$u_{n+1} - 3 - \frac{9}{5}(u_n - 3) = \frac{(2u_n + 3)(u_n - 3)}{u_n + 2} - \frac{9}{5}(u_n - 3) = (u_n - 3) \left(\frac{2u_n + 3}{u_n + 2} - \frac{9}{5} \right)$ $= (u_n - 3) \left(\frac{10u_n + 15 - 9u_n - 18}{5(u_n + 2)} \right) = (u_n - 3) \left(\frac{u_n - 3}{5(u_n + 2)} \right) = \frac{(u_n - 3)^2}{5(u_n + 2)} > 0$	3	
	<p>وبضرب المتفاوتات طرفاً بطرف ثم الاختزال نجد أن: $u_n - 3 \geq \left(\frac{9}{5}\right)^n (u_0 - 3)$</p> <p>بالتالي: $u_n \geq \left(\frac{9}{5}\right)^n + 3$</p>	$\begin{cases} u_1 - 3 \geq \frac{9}{5}(u_0 - 3) > 0 \\ u_2 - 3 \geq \frac{9}{5}(u_1 - 3) > 0 \\ \dots \geq \dots \\ u_n - 3 \geq \frac{9}{5}(u_{n-1} - 3) > 0 \end{cases}$ <p>لدينا: $u_{n+1} - 3 > \frac{9}{5}(u_n - 3)$ إذن:</p>	4
	<p>لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{5}\right)^n = +\infty$ (لأن: $\frac{9}{5} > 1$) إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{5}\right)^n + 3 = +\infty$</p> <p>بالتالي وحسب مصاديق التقارب فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ وهذا يعني أن u_n ليست متقاربة.</p>	5	

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \sqrt{u_n} + 2) \quad ; n \geq 0 \end{cases} \text{ تمرين 2 :}$$

لنبين بالترجع أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq u_n < 4$

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن: $1 \leq u_0 < 4$
- نفترض أن $1 \leq u_n < 4$ ونبين أن $1 \leq u_{n+1} < 4$

$$1 \leq u_n < 4 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq u_n < 4 \\ 1 \leq \sqrt{u_n} < 2 \end{cases} \Rightarrow 1+1+2 \leq u_n + \sqrt{u_n} + 2 < 4+2+2 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Rightarrow 2 \leq \frac{u_n + \sqrt{u_n} + 2}{2} < 4 \Rightarrow 2 \leq u_{n+1} < 4$$

بالتالي و حسب مبدأ التراجع فإن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq u_n < 4$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}(u_n + \sqrt{u_n} + 2) - u_n = \frac{1}{2}(u_n + \sqrt{u_n} + 2 - 2u_n) \\ &= \frac{1}{2}(-u_n + \sqrt{u_n} + 2) = \frac{1}{2}(-(\sqrt{u_n})^2 + \sqrt{u_n} + 2) \end{aligned} \quad \text{لدينا :}$$

لنعمل الحدودية: $-t^2 + t + 2$ ، محددها هي: $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 1 + 8 = 9$

$$\text{منه : } t_1 = \frac{-1+3}{-2} = -1 \quad \text{و} \quad t_2 = \frac{-1-3}{-2} = 2 \quad \text{منه :}$$

$$-t^2 + t + 2 = -1(t-t_1)(t-t_2) = -(t+1)(t-2) = (t+1)(2-t)$$

منه : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(\sqrt{u_n} + 1)(2 - \sqrt{u_n}) > 0$ (لأن: $\sqrt{u_n} < 2$) بالتالي u_n تزايدية قطعاً

سؤال يتطلب التفكير، لكون من الصعب التعرف على الحدودية انطلاقاً من الشكل $-\sqrt{u_n} + \sqrt{u_n} + 2$

لنبين أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < 4 - u_{n+1} < \frac{2}{3}(4 - u_n)$

المتفاوتة $0 \leq 4 - u_{n+1}$ سبق إثباتها في السؤال الأول، لدينا :

$$4 - u_{n+1} = 4 - \frac{1}{2}(u_n + \sqrt{u_n} + 2) = \frac{1}{2}(8 - u_n - \sqrt{u_n} - 2) = \frac{1}{2}(6 - u_n - \sqrt{u_n}) = \frac{1}{2}(-(\sqrt{u_n})^2 - \sqrt{u_n} + 6)$$

لنعمل الحدودية: $-t^2 - t + 6$ ، محددها هي: $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 1 + 24 = 25$

$$-t^2 - t + 6 = -1(t-t_1)(t-t_2) = -(t+3)(t-2) = (t+3)(2-t) \quad \text{منه : } t_1 = \frac{1-5}{-2} = 2 \quad \text{و} \quad t_2 = \frac{1+5}{-2} = -3 \quad \text{منه :}$$

$$4 - u_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{u_n} + 3)(2 - \sqrt{u_n}) = \frac{1}{2}(\sqrt{u_n} + 3) \times \frac{(2 - \sqrt{u_n})(2 + \sqrt{u_n})}{2 + \sqrt{u_n}} = \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{u_n} + 3)(4 - u_n)}{2 + \sqrt{u_n}} \quad \text{منه :}$$

$$(4 - u_{n+1}) - \frac{2}{3}(4 - u_n) = (4 - u_n) \left[\frac{1(\sqrt{u_n} + 3)}{2(2 + \sqrt{u_n})} - \frac{2}{3} \right]$$

$$= (4 - u_n) \left[\frac{3\sqrt{u_n} + 9 - 8 - 4\sqrt{u_n}}{6(2 + \sqrt{u_n})} \right] = (4 - u_n) \left[\frac{1 - \sqrt{u_n}}{6(2 + \sqrt{u_n})} \right] < 0$$

إذن :
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < 4 - u_{n+1} < \frac{2}{3}(4 - u_n)$: بالتالي (لأن : $1 < \sqrt{u_n}$)

سؤال أكثر صعوبة لكونه يتطلب زيادة على التعميل استخراج التعبير $4 - u_n$ من خلال استعمال المرافق

$$0 < 4 - u_1 < \frac{2}{3}(4 - u_0)$$

$$0 < 4 - u_2 < \frac{2}{3}(4 - u_1)$$

... < ... < ...

... < ... < ...

$$0 < 4 - u_n < \frac{2}{3}(4 - u_{n-1})$$

نعلم أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < 4 - u_{n+1} < \frac{2}{3}(4 - u_n)$ (حسب السؤال السابق) إذن :

وبضرب المتفاوتات طرفاً بطرف ثم الاختزال نجد أن : $0 < 4 - u_n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$ منه : $4 - \left(\frac{2}{3}\right)^n < u_n < 4$

بما أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - \left(\frac{2}{3}\right)^n = 4 - 0 = 4$ (لأن : $-1 < \frac{2}{3} < 1$) وحسب مصاديق التقارب فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

لاحظ أن فكرة حل السؤال سبق التطرق لها في تمارين سابقة، هذا يعني ضرورة الاستفادة مما سبق.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \sin u_n ; n \geq 0 \end{cases} \quad \text{تمرين 3}$$

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$

إذن الدالة : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) \geq 0$ إذن f تزايدية على \mathbb{R}

منه : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \sin x \leq x$: بالتالي $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) \Rightarrow \sin(x) \geq x$

بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$ منه : $0 < u_0 < \frac{\pi}{2}$

نفترض أن $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$ منه : $0 < \sin(u_n) < \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ منه : $0 < \frac{1}{2} \sin(u_n) < \frac{1}{2}$ منه $0 < u_{n+1} < \frac{\pi}{2}$

لاحظ أن دالة الجيب تزايدية على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

لدينا حسب I ولكون $u_n > 0$ فإن : $\sin(u_n) \leq u_n$ منه $\frac{1}{2} \sin(u_n) \leq \frac{1}{2} u_n \leq u_n$ منه $u_{n+1} \leq u_n$

إذن تناقصية

بما أن u_n تناقصية و مصغرة بالصفراً فإنها متقاربة، لتكن l نهايتها.

نعتبر الدالة : $g(x) = \frac{1}{2} \sin(x)$ ، بما أن g متصلة على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ و بما أن $g\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0; 1] \subset \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

4

II

1

2

3

فإن l هو أحد حلول المعادلة $g(x) = x$ على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

ولدينا: $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \sin(x) \leq x \Rightarrow \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] g(x) \leq \frac{1}{2}x$

إذن: $x = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \leq x \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2}x \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x) = x \\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ بالتالي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

تمرين 4: $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ u_{n+2} = \frac{3u_{n+1} - u_n}{2}; n \geq 0 \end{cases}$

1 لدينا $v_n = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3u_{n+1} - u_n}{2} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} - u_n}{2} = \frac{1}{2}v_n$ إذن v_n هندسية

أوجد الحد العام للمتتالية $\forall n \in \mathbb{N} v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{u_1 - u_0}{2^n} = \frac{1}{n}$

$$u_1 - u_0 = v_0$$

$$u_2 - u_1 = v_1$$

ولدينا $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} - u_n = v_n$ منه: $u_3 - u_2 = v_2$ منه: $u_n - u_0 = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

...

$$u_n - u_{n-1} = v_{n-1}$$

منه: $\forall n \in \mathbb{N} u_n - 1 = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ منه: $\forall n \in \mathbb{N} u_n = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$

2