سلسلة 2	المتتاليات العددية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 : نعتبر المتتالية $u_n = \frac{2^n}{n!}$ حيث $n \in IN$

1	لدينا : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2\times 2^n}{n!\times(n+1)} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$ $\forall n \geq 3$ منه : $n \geq 3 \Rightarrow n+1 \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$
2	حسب السؤال السابق نستنتج أن: $\frac{u_4}{u_3} \leq \frac{1}{2}$ و $\frac{u_5}{u_4} \leq \frac{1}{2}$ و . . . و $\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{1}{2}$ بضرب هذه المتفاوتات طرفا بطرف و بعد الختزال نجد: $\frac{u_n}{u_3} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ أي : $u_n \leq u_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$
3	لدينا : $0 \leq u_n \leq u_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ و بما أن : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = u_3 \times 0 = 0$ فإن: $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 0$

تمرين 2 : $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ لكل $n \in IN^*$

1	لدينا : $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ $\forall n \in IN^*$ بالتالي المتتالية تزايدية قطعا.
2	لدينا لكل $k \in IN_{-\{0,1\}}$: $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{k^2} = \frac{k-(k-1)}{k^2(k-1)} = \frac{1}{k^2(k-1)} > 0$ منه : $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} > \frac{1}{k^2}$
3	لدينا حسب السؤال السابق : $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ و . . . و $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ بعد جمع المتفاوتات طرفا بطرف و التبسيط نجد: $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$ منه : $u_n < 2 - \frac{1}{n}$
4	لدينا حسب السؤال السابق $u_n < 2 - \frac{1}{n} < 2$ ، إذن المتتالية مكبورة بـ 2 و تزايدية قطعا فهي متقاربة. لا يمكن القول أن المتتالية مكبورة بـ $2 - \frac{1}{n}$ لأنه تعبير يتضمن المتغير n و ليس بعدد ثابت.

تمرين 3 : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \ ; n \geq 0 \end{cases}$

1	سنبين أولا أن $u_n > 0$ $\forall n \in IN$ ، بالنسبة لـ $n = 0$ ، $u_0 = 1 > 0$ نفترض أن $u_n > 0$ منه: $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} > 0$ الآن لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ $\forall n \in IN$ منه $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية تزايدية قطعا.
2	نفترض أن u_n مكبورة ، إذن و لكونها تزايدية فهي متقاربة، نضع : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = a$ منه : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_{n+1} = a$ لدينا : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ $\forall n \geq 0$ منه : $u_n u_{n+1} = u_n^2 + 1$ $\forall n \geq 0$

<table>
<tr><td></td><td>منه: $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}(u_nu_{n+1})=\lim\limits_{n\mapsto+\infty}(u_n^2+1)$ منه: $a^2=a^2+1$ منه : $0=1$ وهذا غير ممكن
إذن u_n متتالية غير مكبورة</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>بما أن u_n متتالية تزايدية و غير مكبورة فإن: $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n=+\infty$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3"><u>تمرين 4</u> : $u_n=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}$ لكل $n\in IN^*$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>لدينا: $u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}>0$ $\forall n\in IN^*$ بالتالي المتتالية تزايدية قطعا.</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>لنبين بالترجع أن : $k!\geq 2^{k-1}$ لكل $k\in IN^*$
بالنسبة لـ $k=1$ $1!=2^{1-1}$، نفترض أن $k!\geq 2^{k-1}$ ، إذن : $(k+1)!=(k+1)k!\geq(k+1)2^{k-1}\geq 2\times 2^{k-1}\geq 2^k$</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>لدينا حسب السؤال السابق : $\frac{1}{1!}\leq\frac{1}{2^0}$ و $\frac{1}{2!}\leq\frac{1}{2^1}$ و $\frac{1}{3!}\leq\frac{1}{2^2}$ و ... و $\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$
إذن: $u_n\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{2^n}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)<2$
، إذن المتتالية مكبورة بـ 2 وتزايدية قطعا فهي إذن متقاربة.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3"><u>تمرين 5</u> : $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ لكل $n\in IN^*$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>لدينا : $S_{n+1}-S_n=\frac{1}{n+1}>0$ $\forall n\in IN$ ، بالتالي S_n تزايدية قطعا</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>لدينا : $S_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$
منه : $S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$
ولدينا : $\frac{1}{n+1}\geq\frac{1}{2n}$ و $\frac{1}{n+2}\geq\frac{1}{2n}$ و ... و $\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2n}$ منه : $S_{2n}-S_n\geq\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+...+\frac{1}{2n}}_{n\ fois}=\frac{1}{2}$</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>نفترض أن u_n مكبورة إذن و لكونها تزايدية فهي متقاربة ، نضع $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}S_n=a$ منه : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}S_{2n}=a$
منه : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}(S_{2n}-S_n)\geq\frac{1}{2}$ منه $a-a\geq\frac{1}{2}$ و هذا غير ممكن
إذن u_n غير مكبورة بالتالي $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n=+\infty$</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>لدينا : $p_{n+1}-p_n=(S_{2n+2}-S_{n+1})-(S_{2n}-S_n)=(S_{2n+2}-S_{2n})-(S_{n+1}-S_n)=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1}$
$=\frac{-1}{2(n+1)}+\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}>0$
إذن p_n تزايدية قطعا، من جهة أخرى لدينا : $\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{n+1}$ و $\frac{1}{n+2}\leq\frac{1}{n+1}$ و ... و $\frac{1}{2n}\leq\frac{1}{n+1}$
منه : $p_n=S_{2n}-S_n\leq\underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n+1}}_{n\ fois}=\frac{n}{n+1}<1$ ، إذن p_n مكبورة بـ 1 بالتالي فهي متقاربة.</td><td></td></tr>
</table>