

~ الثانية علوم رياضية ~
سلسلة المتتاليات (2)

التمرين 1

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$ لكل n من \mathbb{N}

$$(1) \text{ بين أن } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2 \leq u_n \leq 3$$

(2) نعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين بما يلي :

$$\mathbb{N} \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N} \quad w_n = u_{2n+1} \text{ و } v_n = u_{2n}$$

$$\text{بين أن : } w_n = 2 + \frac{1}{v_n} \text{ و } w_{n+1} = 2 + \frac{w_n}{1+2w_n} \text{ و } v_{n+1} = 2 + \frac{v_n}{1+2v_n}$$

$$(3) \text{ أ. أثبت أن : } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n \leq w_n$$

ب. أدرس رتبة كل من المتتاليتين (v_n) و (w_n)

$$(4) \text{ أ. بين أن : } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad w_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{25}(w_n - v_n)$$

$$\text{ب. استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n - v_n)$$

ج. بين أن المتتاليتان (v_n) و (w_n) متحاديتان و حدد نهايتهما

$$(5) \text{ نضع } \alpha = 1 + \sqrt{2}$$

$$\text{أ. حدد عددا حقيقيا } k \text{ بحيث : } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq k |u_n - \alpha|$$

ب. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها

التمرين 2

نعتبر الحدودية P_n المعرفة بما يلي : $P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$(1) \text{ بين أنه } (\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \quad (\exists ! \varepsilon_n \in]0, 1[) \quad P_n(\varepsilon_n) = 0$$

(2) بين أن المتتالية $(\varepsilon_n)_{n \geq 2}$ تناقصية قطعا

$$(3) \text{ بين أن : } (\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \quad 2\varepsilon_n - (\varepsilon_n)^{n+1} - 1 = 0$$

(4) بين أن المتتالية $(\varepsilon_n)_{n \geq 2}$ متقاربة

$$(5) \text{ أحسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n$$

التمرين 3

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a; b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a; b[$ بحيث : $f([a; b]) \subset [a; b]$

$$\text{نفترض أنه : } (\exists k \in [0; 1[) \quad (\forall x \in]a; b[) \quad |f'(x)| \leq k$$

$$(1) \text{ بين أنه : } (\exists ! \alpha \in [a; b]) \quad f(\alpha) = \alpha$$

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 \in [a; b]$ و $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = f(u_n)$

أ. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) a \leq u_n \leq b$

ب. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) |u_{n+1} - \alpha| \leq k |u_n - \alpha|$

ج. استنتج نهاية المتتالية (u_n)

(3) تطبيق : نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 \in [3; 4]$ و $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = 3 + \frac{1}{u_n}$

حدد نهاية المتتالية (u_n)

つづく