السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	المتتاليات العددية	سلسلة 3

تمرين 1 : بين أن كل متتاليتين مما يلي متحاذيتان:

1) $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

2) $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}$

تمرين 2 : نعتبر المتتاليتين : $\begin{cases} u_0 = a \ ; \ v_0 = b \\ u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \quad , \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ حيث $b > a > 0$

1) بين أن : $\forall n \in IN \quad 0 < u_n \leq v_n$

2) أدرس رتابة u_n و v_n

3) أثبت أن : $\forall n \in IN \quad 0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

4) بين أن : $\forall n \in IN \quad 0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(b-a)$

5) أثبت أن u_n و v_n متقاربتان

6) نضع : $w_n = u_n \, v_n$

أ) أدرس رتابة w_n

ب) حدد نهاية كل من u_n و v_n

تمرين 3 : نعتبر المتتاليتين : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}$

1) بين أن u_n و v_n متقاربتان

2) نضع $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$ و نفترض أن ℓ عدد جذري أي $\ell = \frac{p}{q}$ حيث $(p,q) \in IN \times IN^*$

أ) بين أن : $0 < \frac{p}{q} - u_q < \frac{1}{q\,q!}$

ب) بين أن $\frac{p}{q} - u_q$ كسر مقامه $q!$

3) استنتج أن $\ell \notin Q$ (العدد ℓ نرمز له بـ e ويسمى الأساس النبيري)