المتتاليات العددية

I) عموميات.

1- تعريف:

نسمي متتالية عددية كل تطبيق u من جزء I من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$

$$u : I \to \mathbb{R}$$
$$n \to u(n)$$

ترميز:

* نرمز لـ $u(n)$ بالرمز u_n.

* نرمز للمتتالية u بالرمز: $(U_n)_{n\in I}$

* u_n يسمى الحد ذا المد لـ n.

ملاحظة:

1- لا يجب الخلط بين: $(U_n)_{n\in I}$ التي تمثل التطبيق u و u_n الذي يمثل عدد حقيقي.

و $\{U_n\}_{n\in I}$ التي تمثل مجموعة القيم التي تأخذها المتتالية.

2- نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ منتهية إذا كانت I منتهية ونقول إنها غير منتهية إذا كانت I غير منتهية.

أمثلة:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث $U_n = \sqrt{n^2+1}$

لدينا: $u_o = 1$; $u_1 = \sqrt{2}$; $u_2 = \sqrt{5}$; $u_3 = \sqrt{10}$

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث $u_n = (-1)^n$

$u_0 = 1$; $u_1 = -1$; $u_2 = 1$; $u_3 = -1$

$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{-1,1\}$

ملاحظة:

يمكن لمتتالية أن تكون معرفة بالعبارة الصريحة لحدها العام أو بالترجع وذلك حينما يتم حساب حد ما بالرجوع إلى حدود سابقة.

أمثلة:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

لدينا: $u_1 = 2u_0 - 3 = -1$

$u_2 = 2u_1 - 3 = -5$

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \end{cases}$

لدينا: $u_2 = 2u_1 - u_0 = 3$

$u_3 = 2u_2 - u_1 = 4$

2- تساوي متتاليتين

تعريف:

نقول إن $(U_n)_{n\in I}$ و $(V_n)_{n\in J}$ متسويتين إذا وفقط إذا كان:

$$\begin{cases} I = J \\ (\forall n\in I) u_n = v_n \end{cases}$$

3- العمليات على المتتاليات:

نعرف مجموع وجداء متتاليتين وضرب عدد في متتالية كما يلي:

$$(U_n)_{n\in I} + (V_n)_{n\in I} = (U_n + V_n)_{n\in I}$$
$$(U_n)_{n\in I} . (V_n)_{n\in I} = (U_n . V_n)_{n\in I}$$
$$\lambda (U_n)_{n\in I} = (\lambda U_n)_{n\in I}$$

4- المتتالية الدورية:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\ge n_0}$ إذا وفقط إذا وجد عدد طبيعي غير منعدم p بحيث $(\forall n \ge n_0) U_{n+p} = U_n$

- أصغر عدد p يحقق الشرط يسمى دور المتتالية.

مثال:

نعبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث $U_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

لدينا: $(\forall n \ge n_0) u_{n+6} = \cos\left(\frac{(n+6)\pi}{3}\right)$

$$= \cos\left(\frac{n\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = U_n$$

إذن (U_n) دورية دورها 6.

II) المتتاليات المحدودة:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$:

مكبورة، إذا وفقط إذا كان: $(\exists M\in\mathbb{R})(\forall n\in I) u_n \le M$

مصغورة، إذا وفقط إذا: $(\exists m\in\mathbb{R})(\forall n\in I) m \le u_n$

محدودة إذا وفقط إذا كانت مكبورة ومصغورة يعني:

$$(\exists m, M\in\mathbb{R})(\forall n\in I) m \le u_n \le M$$

ملاحظة:

تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ محدودة إذا وفقط إذا:

$$(\exists M \rangle 0)(\forall n\in I)|u_n| \le M$$

أمثلة:

1- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ بحيث $u_n = \frac{1}{n}$

لدينا: $n \ge 1$ $\quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$

يعني: $(\forall n\in\mathbb{N}^*) 0 \langle \frac{1}{n} \le 1$

إذن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*) 0 \langle u_n \le 1$

إذن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ محدودة.

2- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$

لدينا: $|u_n| = \frac{1}{n^2+1}$

ولدينا: $n^2 \ge 0$ $\quad (\forall n\in\mathbb{N})$

$n^2 + 1 \ge 1$

يعني: $\frac{1}{n^2+1} \le 1$

يعني: $|u_n|\le 1$ $\quad(\forall n\in\mathbb{N})$

إذن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة.

3- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث: $\begin{cases}u_0=3\\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}\end{cases}$

لنبين أن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مصغورة ب 2:

يعني: $(\forall n\in\mathbb{N})\ 2\le u_n$

نستعمل الاستدلال بالتراجع:

لدينا من أجل $n=0$; $u_0=3\ge 2$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفترض أن الخاصية صحيحة من أجل n يعني $u_n\ge 2$

لنبين أنها صحيحة من أجل $n+1$ يعني $u_{n+1}\ge 2$.

لدينا: $u_n\ge 2$

يعني $u_n+2\ge 4$

يعني $\sqrt{u_n+2}\ge 2$

إذن $u_{n+1}\ge 2$

طريقة أخرى:

لدينا:
$$u_{n+1}-2=\sqrt{u_n+2}-2=\frac{(u_n+2)-4}{\sqrt{u_n+2}+2}=\frac{u_n-2}{\sqrt{u_n+2}+2}\ge 0$$

لأن $u_n\ge 2$

إذن $u_{n+1}\ge 2$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

وبالتالي $u_n\ge 2$ $\quad(\forall n\in\mathbb{N})$

ومنه $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مصغورة ب 2.

III) المتتالية الرتيبة:

تعريف:

نقول إن $(u_n)_{n\ge n_0}$

تزايدية، إذا وفقط إذا كان: $(\forall n\ge n_0)\ u_n\le u_{n+1}$

تزايدية قطعا: $(\forall n\ge n_0)\ u_n<u_{n+1}$

تناقصية: $(\forall n\ge n_0)\ u_n\ge u_{n+1}$

قطعا: $(\forall n\ge n_0)\ u_n>u_{n+1}$

ثابتة إذا وفقط إذا كان: $(\forall n\ge n_0)\ u_n=u_{n+1}$

ملاحظة:

← من أجل دراسة رتابة المتتالية (U_n) نقوم بدراسة إشارة: $u_{n+1}-u_n$

– إذا كان $u_{n+1}-u_n\ge 0$ فإن (U_n) تزايدية.

– إذا كان $u_{n+1}-u_n\le 0$ فإن (U_n) تناقصية.

– إذا كان $u_{n+1}-u_n=0$ فإن (U_n) ثابتة.

← نقول إن المتتالية (U_n) رتيبة إذا كانت تزايدية أو تناقصية.

← تكون المتتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$:

– تزايدية: $(\forall p,q\ge n_0)\quad p\le q\Rightarrow u_p\le u_q$

– تناقصية: $p\le q\Rightarrow u_p\ge u_q$

– ثابتة: $p<q\Rightarrow u_p=u_q$

أمثلة:

1- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث $u_n=3n-4$

لندرس رتابة (U_n):

لدينا:
$$u_{n+1}-u_n=3(n+1)-4-(3n-4)=3n-1-3n+4=3>0$$

إذن (U_n) تزايدية قطعا.

2- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث: $\begin{cases}u_0=3\\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}\end{cases}$

لندرس الرتابة:

وجدنا سابقا أن $u_n\ge 2$ $\quad(\forall n\in\mathbb{N})$

– لندرس رتابة (U_n)

لدينا:
$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n+2}-u_n=\frac{u_n+2-u_n^2}{\sqrt{u_n+2}+u_n}$$

لندرس إشارة: $-u_n^2+u_n+2$

لندرس إشارة: $-x^2+x+2$

$\Delta=9$

$x_1=2$; $x_2=-1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-x^2+x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ولدينا $u_n\ge 2$ إذن: $-u_n^2+u_n+2\le 0$

ومنه $u_{n+1}-u_n\le 0$

إذن (U_n) تناقصية.

طريقة أخرى:

لدينا:
$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n+2}-\sqrt{u_{n-1}+2}=\frac{u_n-u_{n-1}}{\sqrt{u_n+2}+\sqrt{u_{n-1}+2}}$$

إذن إشارة $u_{n+1}-u_n$ هي إشارة u_n-u_{n-1}:

إذن $u_{n+1}-u_n$ له إشارة ثابتة هي إشارة u_1-u_0

ولدينا: $u_1-u_0=\sqrt{5}-3<0$

إذن $u_{n+1}-u_n<0$

ومنه (U_n) تناقصية.

IV) دراسة بعض المتتاليات الترجعية:

1- المتتاليات الحسابية:

a) تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r

بحيث $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1}=u_n+r$

– العدد r يسمى أساس هذه المتتالية.

و u_0 الحد الأول لهذه المتتالية.

ملاحظة:

– تكون المتتالية (U_n) حسابية إذا وفقط إذا كان الفرق بين حدين متتابعين ثابتا وهذه الثابتة هي الأساس.

– كل متتالية حسابية تكون معرفة بحدها الأول وأساسها. أو بحدها وأساسها.

أمثلة:

1- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث: $u_n=-5n+1$

لنبين أن (U_n) حسابية:

لدينا:
$$U_{n+1}-U_n=-5(n+1)+1-(-5n+1)$$
$$=-5$$

إذن المتتالية (U_n) أساسها $r=-5$ وحدها الأول: $u_0=1$.

2- لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها الأول $u_0=-10$

لنحسب u_5:

نعلم أن:
$$u_{n+1}=u_n+r$$
$$u_{n+1}=u_n+3$$

إذن:
$$u_1=u_0+3=-7$$
$$u_2=u_1+3=-4$$
$$u_3=u_2+3=-1$$
$$u_4=u_3+3=2$$
$$u_5=u_4+3=5$$

b) خاصية مميزة:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$(\text{حسابية } (U_n)) \Leftrightarrow (\forall n\in\mathbb{N})\ U_{n+1}-U_n=U_n-U_{n-1}$$
$$\Leftrightarrow (\forall n\in\mathbb{N})\ 2U_n=U_{n+1}+U_{n-1}$$
$$\Leftrightarrow (\forall n\in\mathbb{N})\ U_n=\frac{U_{n+1}+U_{n-1}}{2}$$

خاصية:

تكون المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ حسابية إذا وفقط إذا كان:
$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\qquad U_n=\frac{U_{n-1}+U_{n+1}}{2}$$
يعني $U_{n-1}+U_{n+1}=2U_n$

ملاحظة:

تكون الأعداد a و b و c في هذا الترتيب ثلاث حدود لمتتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $a+c=2b$

c) الحد العام لمتتالية حسابية:

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r:

نعلم أن: $(\forall n\in\mathbb{N})\ U_{n+1}=U_n+r$

إذن:
$$u_1=u_0+r$$
$$u_2=u_1+r$$
$$u_3=u_2+r$$
.

.

.
$$u_n=u_{n-1}+r$$

بجمع أطراف المتفاوتات نحصل على:
$$u_n=u_0+\underbrace{r+r+\ldots+r}_{n\text{ مرة}}$$

أي $u_n=u_0+nr$.

خاصية:

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0.

لدينا: $U_n=U_0+nr \qquad (\forall n\in\mathbb{N})$

ملاحظة:

إذا كان الحد الأول هو u_1: $\quad U_n=U_1+(n-1)r$

بصفة عامة: إذا كان u_p و u_n حدين من متتالية حسابية أساسها r فإن $u_n=u_p+(n-p)r$ (ترتيب n و p غير مهم).

أمثلة:

1- لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها $r=4$ وحدها الأول $u_1=-10$

لنحسب u_{100}

لدينا:
$$u_{100}=u_1+(100-1)r$$
$$=u_1+99r=-10+99\times4$$
$$=-10+396=386=u_{100}$$

2- (U_n) متتالية حسابية أساسها $r=-3$ و $u_{20}=100$

لنحسب u_5 و u_0

لدينا:
$$u_5=u_{20}+(5-20)r$$
$$=100+45=145.$$

و
$$u_0=u_5+(0-5)r$$
$$=145+15=160.$$

3- (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 وأساسها r بحيث $U_{20}=100$ و $U_{10}=30$

حدد الحد العام:

لنحدد r:

لدينا: $u_{20}=u_{10}+(20-10)r$

يعني: $r=\dfrac{u_{20}-u_{10}}{10}=\dfrac{100-30}{10}$

يعني: $r=7$

إذن:
$$(\forall n\in\mathbb{N})u_n=u_{10}+(n-10)r$$
$$=30+7n-70$$
$$=7n-40$$

إذن $(\forall n\in\mathbb{N})u_n=7n-40$

d) مجموع حدود متتابعة متتالية حسابية:

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

لنحسب $S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$

لدينا: $S=u_0+u_1+\ldots+u_k+\ldots+u_{n-1}+u_n$

و $S=u_n+u_{n-1}+u_{n-2}+\ldots+u_{n-k}+\ldots+u_0$
$$2S=(u_0+u_n)+(u_1+u_{n-1})+\ldots+(u_k+u_{n-k})+\ldots(u_n+u_0)$$

ولدينا:
$$u_k=u_0+kr$$
$$u_{n-k}=u_0+(n-k)r$$

إذن:
$$u_k+u_{n-k}=u_0+u_0+nr$$
$$=u_0+u_n$$

إذن $(\forall k\in\mathbb{N})\ u_k+u_{n-k}=u_0+u_n$
$$2S=\underbrace{(u_0+u_n)+(u_0+u_n)+\ldots+(u_0+u_n)}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{n+1 \text{ مرة}}$

إذن: $2S = (u_0 + u_n)(n+1)$

$$S = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

خاصية:

لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

لدينا:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = (n+1)\frac{(u_0+u_n)}{2}$$

u_0 الحد الأول للمجموع S

u_n الحد الأخير للمجموع S

$n+1$ عدد حدود المجموع S .

ملاحظة:

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = n \cdot \frac{u_1 + u_n}{2}$$

$$u_p + u_{p+1} + ... + u_n = (n-p+1)\frac{(u_p+u_n)}{2}$$

أمثلة:

1) أحسب: $S = 43 + 47 + 51 + ... + 203$

نلاحظ أن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $r = 4$ وحدها الأول $u_0 = 43$

نضع $u_n = 203$ ولنحدد n

نعلم أن: $u_n = u_0 + nr$

$u_n = 43 + 4n$

إذن $u_n = 203 \Leftrightarrow 4n = 203 - 43$

$$\Leftrightarrow n = \frac{160}{4} = 40$$

إذن $203 = u_{40}$

إذن: $S = u_0 + u_1 + ... + u_{40} = (40+1)\frac{u_0 + u_{40}}{2}$

$$= 41 \cdot \frac{43+203}{2}$$

إذن $S = 5043$

2) لنحسب $S = 1 + 2 + ... + n$

نلاحظ أن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $r = 1$ وعدد حدوده هو n .

إذن $S = n.\frac{1+n}{2}$

أي $1 + 2 + ... + n = n\left(\frac{1+n}{2}\right)$

3) لنحسب $S = 2 + 4 + ... + 2n$

نلاحظ أن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $r = 2$ عدد حدوده هو n .

إذن $S = n.\frac{2+2n}{2} = n(1+n)$

2- المتتالية الهندسية:

a) تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث: $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = q.u_n$

q يسمى أساس (U_n) .

ملاحظات:

* تكون متتالية التي حدودها غير منعدمة هندسية إذا وفقط إذا كان خارج حدين متتابعين ثابت.

* تكون المتتالية هندسية معرفة بأحد حدودها وأساسها.

* إذا كان $u_0 = 0$ فإن $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = 0$

* إذا كان $q = 0$ فإن $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n = 0$

* إذا كان $q = 1$ فإن $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = u_0$

b) خاصية مميزة:

تكون المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ هندسية إذا وفقط إذا كان:

$$u_{n+1}.u_{n-1} = u_n^2$$

ملاحظة:

تكون الأعداد c,b,a في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية إذا وفقط إذا كان: $a.c = b^2$

c) الحد العام لمتتالية هندسية:

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q \neq 0$ وحدها الأول $u_0 \neq 0$

لنحسب u_n بدلالة n

لدينا $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = qu_n$

إذن $u_1 = qu_0$

$u_2 = qu_1$

.

.

.

$u_n = qu_{n-1}$

بضرب أطراف المتساويات نجد: $u_n = \cancel{u_0}.\underbrace{q.q....q}_{n \text{ مرة}}$

إذن $u_0 = u_0.q^n$

وهذه العلاقة تبقى صحيحة إذا كان $q = 0$ أو $u_0 = 0$

خاصية:

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مجموعة هندسية أساسها q وحدها الأول u_0

لدينا: $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = u_0.q^n$

ملاحظة:

إذا كان u_1 هو الحد الأول: $u_n = u_1.q^{n-1}$

بصفة عامة: إذا كان u_n و u_p حدين من مجموعة هندسية أساسها q فإن: $u_n = u_p.q^{n-p}$ (ترتيب n و p غير مهم).

d) مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية:

لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0

لنحسب: $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

* إذا كان $q = 1$ فإن: $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = u_0$

إذن $S = \underbrace{u_0 + u_0 + ... + u_0}_{n+1 \text{ مرة}} = (n+1)u_0$

* إذا كان $q \neq 1$ فإن:

لدينا: $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

ولدينا $u_k = u_0 q^k$

إذن: $(1)\ S = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \ldots + u_0 q^{n-1} + u_0 q^n$

$(2)\ qS = u_0 q + u_0 q^2 + u_0 q^3 + \ldots + u_0 q^n + u_0 q^{n+1}$

من $(1)-(2)$ نجد:

$$S - qS = u_0 - u_0 q^{n+1}$$

يعني: $S = u_0 . \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

خاصية:

لتكن (U_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0

لدينا:

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \begin{cases} u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} ; q \neq 1 \\ (n+1) u_0 ; q = 1 \end{cases}$$

u_0: الحد الأول للمجموع S.

$(n+1)$: عدد حدود المجموع S.

ملاحظة:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 . \frac{1-q^n}{1-q}$$

بصفة عامة: $u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p . \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

أمثلة:

1) لنحسب: $S = 3 + 3\times 2 + 3\times 2^2 + \ldots + 3\times 2^n$

نلاحظ أن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q = 2$ وعدد حدوده: $n+1$

إذن: $S = 3.\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2}$

$$= 3.\frac{1-2^{n+1}}{-1} = -3\left(1-2^{n+1}\right) = 3\left(2^{n+1}-1\right)$$

2) ليكن $x \neq 1$ لنحسب: $S = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$

نلاحظ أن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها α وعدد حدوده $n+1$.

إذن: $S = 1.\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

إذن $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

3- المتتالية التي تحقق: $a \neq 1\ \ b \neq 0,\ U_{n+1} = au_n + b$

نعتبر العلاقة $U_{n+1} = au_n + b$ مع $a \neq 1$ و $b \neq 0$

*) لنحدد المتتاليات الثابتة التي تحقق العلاقة (1):

نضع $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n = \alpha$

$$\left((U_n) \text{ تحقق } (1)\right) \Leftrightarrow u_{n+1} = au_n + b$$
$$\Leftrightarrow \alpha = a\alpha + b$$
$$\Leftrightarrow (1-a)\alpha = b$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{b}{1-a}$$

إذن توجد متتالية ثابتة وحيدة تحقق (1) هي $u_n = \alpha$ مع $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$

*) لنحدد جميع المتتاليات التي تحقق (1)

لدينا $u_n = \alpha$ تحقق (1) إذن: $\alpha = a\alpha + b$

يعني: $b = \alpha - a\alpha$

$$\left((U_n) \text{ تحقق } (1)\right) \Leftrightarrow u_{n+1} = au_n + b$$
$$\Leftrightarrow u_{n+1} = au_n + b$$
$$\Leftrightarrow u_{n+1} - \alpha = a\left(u_n - \alpha\right) *$$

نضع $v_n = u_n - \alpha$

لدينا: $* \Leftrightarrow v_{n+1} = av_n$

إذن (v_n) هندسية أساسها a.

إذن $v_n = v_0 . q^n$

أي $v_n = v_0 . a^n$

ويعني $v_n = \left(u_0 - \alpha\right) a^n$

ولدينا: $v_n = u_n - \alpha$

يعني $u_n = v_n + \alpha$

يعني $u_n = \left(u_0 - \alpha\right) a^n + \alpha$

إذن المتتاليات التي تحقق (1) هي $u_n = \left(u_0 - \alpha\right) a^n + \alpha$

حيث $u_0 \in \mathbb{R}$ و α حل للمعادلة $x = ax + b$

خاصية:

من أجل البحث عن جميع المتتاليات التي تحقق العلاقة $u_{n+1} = au_n + b$ مع $a \neq 1$ و $b \neq 0$

نقوم بحل المعادلة $x = ax + b$ ليكن α حلها.

نضع $v_n = u_n - \alpha$ ثم نبين أن (v_n) هندسية أساسها سيكون v

نستنتج الحد العام ل (v_n) ثم نستنتج الحد العام ل (u_n).

مثال:

حدد الحد العام للمتتالية (u_n):

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$

لنحل المعادلة $x = 2x - 3$

يعني $x = 3$

نضع $v_n = u_n - 3$ لنبين أن (v_n) هندسية.

لدينا: $v_{n+1} = u_{n+1} - 3$

$$= 2u_n - 3 - 3$$
$$= 2u_n - 6$$
$$= 2\left(u_n - 3\right) = 2v_n$$

إذن (v_n) هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول: $v_0 = u_0 - 3 = -2$

إذن $v_n = v_0 . q$

$$= -2.2^n$$
$$v_n = -2^{n+1}$$

ولدينا $v_n = u_n - 3$ يعني $u_n = v_n + 3$

يعني $u_n = -2^{n+1} + 3$

4- المتتاليات التي تحقق: $b\neq 0\ ,\ u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$

نعتبر العلاقة (1): $b\neq 0,u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$

a) خاصيات:

خاصية (1):

إذا كانت (v_n) و (u_n) ممتتاليتان تحققان العلاقة (1) فإن كل متتالية على شكل: $w_n=\alpha u_n+\beta v_n$ حيث $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$

برهان:

نفترض أن (u_n) و (v_n) تحققان (1)

نضع $w_n=\alpha u_n+\beta v_n$ (مع α و $\beta\in\mathbb{R}$).

لنبين أن (w_n) تحقق العلاقة (1):

يعني: $w_{n+2}=aw_{n+1}+bw_n$

لدينا: $w_{n+2}=\alpha u_{n+2}+\beta v_{n+2}$

$$=\alpha\left(au_{n+1}+bu_n\right)+\left(av_{n+1}+bv_n\right)$$

$$=a\left(\alpha u_{n+1}+\beta v_{n+1}\right)+b\left(\alpha u_n+\beta v_n\right)$$

$$=aw_{n+1}+bw_n$$

إذن (w_n) تحقق (1).

خاصية (2):

إذا كانت (U_n) و (V_n) متتاليتين تحققان (1) وغير متناسبتين (لا يوجد γ بحيث $(\forall n\in\mathbb{N})\ v_n=\gamma u_n$ يعني $\frac{v_n}{u_n}\neq cste$) فإن المتتاليات التي تحقق (1) هي المتتاليات التي تكتب على شكل $w_n=\alpha u_n+\beta v_n$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$.

برهان:

لتكن (u_n) و (v_n) غير متناسبتين وتحققان (1)

وجدنا من خلال ما سبق أن كل متتالية على شكل: $w_n=\alpha u_n+\beta v_n$ تحقق (1).

عكسيا: لتكن (w_n) متتالية تحقق (1)

لنبين أنه يوجد α و β من $\mathbb{R}$ بحيث $w_n=\alpha u_n+\beta v_n$

لدينا: $(\forall n\in\mathbb{N})\ w_n=\alpha u_n+\beta v_n$

إذن:

$$\begin{cases} w_n=\alpha u_n+\beta v_n \\ w_{n+1}=\alpha u_{n+1}+\beta v_{n+1}\end{cases}$$

نحصل إذن على النظمة: $(S)\begin{cases}\alpha u_n+\beta v_n=w_n \\ \alpha u_{n+1}+\beta v_{n+1}=w_{n+1}\end{cases}$

مجاهلها هما α و β:

لدينا: $\Delta_n=\begin{vmatrix} u_n & v_n \\ u_{n+1} & v_{n+1}\end{vmatrix}=u_nv_{n+1}-v_nu_{n+1}$

لدينا: $\Delta_{n+1}=u_{n+1}.v_{n+2}-v_{n+1}.u_{n+2}$

$$u_{n+1}\left(av_{n+1}+bv_n\right)-v_{n+1}\left(au_{n+1}+bu_n\right)$$

$$\Delta_{n+1}=bu_{n+1}.v_n-bv_{n+1}.u_n$$

$$=-b\left(u_n.v_{n+1}-v_n.u_{n+1}\right)=-b\Delta_n$$

إذن (Δ_n) هندسية أساسها $q=-b$ وحدها الأول Δ_0.

$$\Delta_n=\Delta_0.q^n=(-b)^n.\Delta_0$$

لنبين أن $\Delta_0\neq 0$

نفترض العكس يعني $\Delta_0=0$

إذن $\Delta_n=0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

يعني $u_nv_{n+1}-v_nu_{n+1}=0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

يعني $\frac{u_n}{v_n}=\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

هذا يعني أن $\frac{u_n}{v_n}$ ثابتة يعني: $(\forall n\in\mathbb{N})\frac{u_n}{v_n}=\gamma$

يعني: $u_n=\gamma v_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

وهذا تناقض لأن (u_n) و (v_n) غير متناسبتين.

إذن $\Delta_0\neq 0$ ومنه: $(\forall n\in\mathbb{N})\Delta_n\neq 0$

إذن النظمة (S) تقبل حلا وحيدا. (α,β)

لنبين أن α و β لا يتعلقان ب n:

$$\Delta_n^{\alpha}=\begin{vmatrix} w_n & v_n \\ w_{n+1} & v_{n+1}\end{vmatrix}=w_n.v_{n+1}-w_{n+1}.v_n$$

بنفس الطريقة نبين أن (Δ_n^{α}) هندسية أساسها $-b$

إذن $\Delta_n^{\alpha}=\Delta_0^{\alpha}.(-b)^n$

إذن $\alpha=\frac{\Delta_n^{\alpha}}{\Delta_n}=\frac{\Delta_0^{\alpha}(-b)^n}{\Delta_0(-b)^n}$

$$=\frac{w_0v_1-w_1v_0}{u_0v_1-u_1v_0}$$

إذن α ثابتة، وبنفس الطرقة نبين أن β ثابتة.

إذن يوجد α و β من $\mathbb{R}$ بحيث: $(\forall n\in\mathbb{N})\ w_n=\alpha u_n+\beta v_n$.

وبالتالي المتتاليات التي تحقق (1) هي المتتاليات التي تكتب على شكل $w_n=\alpha u_n+\beta v_n$.

b) البحث عن المتتاليات التي تحقق (1):

لنبحث عن المتتاليات الهندسية التي تحقق (1):

لتكن (U_n) أساسها $q\neq 0$ و $u_0\neq 0$

لدينا $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n=u_0.q^n$

((U_n) تحقق (1)) $\Leftrightarrow u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$

$$\Leftrightarrow u_0.q^{n+2}=a.u_0q^{n+1}+bu_0.q^n$$

$$\Leftrightarrow u_0.q^n\left(q^2-aq-b\right)=0$$

$$\Leftrightarrow q^2-aq-b=0$$

تعريف:

المعادلة $q^2-aq-b=0$ تسمى المعادلة المميزة للعلاقة (1).

نعتبر إذن المعادلة $(E)\ q^2-aq-b=0$

$$\Delta=a^2+4b$$

إذا كان $\Delta\rangle 0$ فإن (E) تقبل حلين حقيقيين مختلفين q_1 و q_2.

إذن: $u_n=q_1^n$ و $v_n=q_2^n$ تحققان (1)

ولدينا: $\frac{V_n}{U_n}=\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^n\neq cte$ لأن $q_1\neq q_2$

إذن (u_n) و (v_n) غير متناسبتين.

إذن المتتاليات التي تحقق (1) هي:

$$w_n=\alpha u_n+\beta v_n=\alpha q_1^n+\beta q_2^n$$

إذا كان $\Delta=0$ فإن (E) تقبل حلا وحيدا: $q=\frac{a}{2}$

إذن المتتالية $u_n=q^n$ تحقق العلاقة (1)

نضع $v_n=nu_n$ لنبين أن (V_n) تحقق (1)

يعني $v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n$

لدينا: $v_{n+2} - \left(av_{n+1} + bv_n\right) = (n+2)q^{n+2} - a(n+1)q^{n+1} - bnq^n$

$$= nq^{n+2} + 2q^{n+2} - anq^{n+1} - aq^{n+1} - bnq^n$$

$$= nq^n \underbrace{\left(q^2 - aq - b\right)}_{=0} + q^{n+1}(2q-a) = 0$$

لأن $q = \frac{a}{2}$ و $q^2 - aq - b = 0$

إذن (V_n) تحقق (1).

ولدينا $\frac{V_n}{U_n} = n \neq cste$ إذن (u_n) و (v_n) غير متناسبتين. وبالتالي المتتاليات التي تحقق (1) على التي تكتب على شكل:

$$w_n = \alpha u_n + \beta v_n$$
$$= \alpha q^n + \beta n.q^n$$
$$w_n = (\alpha + \beta n)q^n \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

إذا كان $\Delta \langle 0$ فإن (E) تقبل حلين عقديين مترافقين في $\mathbb{C}$ هما:

$q = re^{i\theta}$ و $\bar{q}$

لدينا: $q^2 - aq - b = 0$

يعني $q^{n+2} - aq^{n+1} - bq^n = 0$

يعني $r^{n+2}.e^{i(n+2)\theta} - a.r^{n+1}.e^{i(n+1)\theta} - br^n.e^{in\theta} = 0$

$$\Leftrightarrow r^{n+2}\left(\cos((n+2)\theta) + i\sin((n+2)\theta)\right)$$
$$- ar^{n+1}\left(\cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)\right)$$
$$- br^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[r^{n+2}\cos((n+2)\theta) - ar^{n+1}\cos((n+1)\theta) - br^n\cos n\theta\right]$$
$$+ i\left[r^{n+2}\sin((n+2)\theta) - ar^{n+1}\sin((n+1)\theta) - br^n\sin n\theta\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^{n+2}\cos((n+2)\theta) = ar^{n+1}\cos((n+1)\theta) + br^n\cos n\theta \\ r^{n+2}\sin((n+2)\theta) = ar^{n+1}\sin((n+1)\theta) + br^n\sin n\theta \end{cases} *$$

نضع: $u_n = r^n\cos n\theta$

و $v_n = r^n\sin n\theta$

$$* \Leftrightarrow \begin{cases} u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \\ v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n \end{cases}$$

إذن (u_n) و (v_n) تحققان العلاقة (1)

ولدينا: $\frac{v_n}{u_n} = tg(n\theta) \neq cste$

إذن (U_n) و (V_n) غير متناسبتين.

وبالتالي المتتاليات التي تحقق (1) هي:

$w_n = \alpha u_n + \beta v_n$ مع α و β من $\mathbb{R}$.

أي

$$w_n = \alpha\left(r^n\cos n\theta\right) + \beta\left(r^n\sin n\theta\right)$$
$$= r^n\left(\alpha\cos n\theta + \beta\sin n\theta\right)$$

خاصية:

نعتبر العلاقة $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (b \neq 0)$

لتكن $(E):$ $q^2 - aq - b = 0$ المعادلة المميزة ل (1)

ليكن $\Delta = a^2 + 4b$

إذا كان $\Delta \rangle 0$ فإن (E) تقبل حلين حقيقيين مختلفين q_1 و q_2. وتكون المتتاليات التي تحقق العلاقة (1) هي المتتاليات التي تكتب على شكل: $w_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$ حيث α و β من $\mathbb{R}$.

إذا كان $\Delta = 0$ فإن (E) تقبل حلا وحيدا q. وتكون المتتاليات التي تحقق (1) هي المتتاليات التي تكتب على شكل: $w_n = (\alpha + \beta n)q^n$ حيث (α و β من $\mathbb{R}$).

إذا كان $\Delta \langle 0$ فإن (E) تقبل حلين عقديين مترافقين $q = re^{i\theta}$ و $\bar{q}$ وتكون المتتاليات التي تحقق (1) هي المتتاليات التي تكتب على شكل: $w_n = r^n(\alpha\cos n\theta + \beta\sin n\theta)$ (α و β من $\mathbb{R}$).

تمرين تطبيقي:

حدد الحد العام للمتتالية (U_n) في الحالات التالية:

1- $\begin{cases} u_0 = 1 \ , \quad u_1 = -1 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$

2- $\begin{cases} u_0 = 1 \ , \quad u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$

3- $\begin{cases} u_0 = 1 \ , \quad u_1 = -1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \end{cases}$

1- المعادلة المميزة هي: $(E): q^2 - 5q + 6 = 0$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$q_1 = 2 \quad ; \quad q_2 = 3$

إذن: $u_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$

ولدينا: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -1 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha + 3\beta = -1 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$$

إذن $\begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -3 \end{cases}$

إذن $u_n = 4.2^n - 3.3^n$

$u_n = 2^{n+2} - 3^{n+1}$

2- المعادلة المميزة هي: $(E): \ q^2 - 6q + 9 = 0$

لنحل $(E):$ $\Delta = 36 - 36 = 0$

إذن $q = \frac{6}{2} = 3$

إذن: $u_n = (\alpha + \beta n).3^n$

ولدينا: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} \alpha = 1 \\ 3(\alpha + \beta) = 2 \end{cases}$

يعني $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-\frac{1}{3}\end{cases}$

إذن: $u_n=\left(1-\frac{1}{3}n\right)3^n$

3- المعادلة المميزة هي: $(E):\ q^2-q+1=0$

لنحل (E): $\Delta=1-4=-3$

إذن: $q_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $q_2=\bar{q}_1$

لدينا: $q_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

إذن: $u_n=1^n\left(\alpha\cos n\frac{\pi}{3}+\beta\sin n\frac{\pi}{3}\right)$

يعني: $u_n=\alpha\cos n\frac{\pi}{3}+\beta\sin n\frac{\pi}{3}$

ولدينا: $\begin{cases}u_0=1\\ u_1=-2\end{cases}$ يعني $\begin{cases}\alpha=1\\ \alpha\cos\frac{\pi}{3}+\beta\sin\frac{\pi}{3}=-2\end{cases}$

يعني: $\begin{cases}\alpha=1\\ \frac{1}{2}\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\beta=-2\end{cases}$ يعني $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=\frac{-5}{\sqrt{3}}\end{cases}$

إذن: $u_n=\cos n\frac{\pi}{3}-\frac{5\sqrt{3}}{3}\sin n\frac{\pi}{3}$

V- نهاية متتالية:

1- تعريف

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

نقول إن المتتالية (U_n) تؤول إلى $+\infty$ إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall A>0)(\exists n_0\in\mathbb{N}^*):\ n>n_0\Rightarrow U_n>A$$

ونكتب: $\lim U_n=+\infty$

نقول إن المتتالية (U_n) تؤول إلى $-\infty$ إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall A>0)(\exists n_0\in\mathbb{N}^*):\ n>n_0\Rightarrow U_n<-A$$

ونكتب: $\lim U_n=-\infty$

نقول إن المتتالية (U_n) تؤول إلى العدد الحقيقي l إذا وفقط إذا كان: $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N}^*):n>n_0\Rightarrow|u_n-l|<\varepsilon$

ونكتب: $\lim U_n=l$ ونقول في هذه الحالة إن المتتالية (U_n) متباعدة إذا وفقط إذا كانت غير متقاربة.

مثال:

نعتبر المتتالية: $U_n=\sqrt{n}$

لنبين أن $\lim U_n=+\infty$ يعني: $(\forall A>0)(n_0\in\mathbb{N}^*):n>n_0\Rightarrow u_n>A$

ليكن: $A>0$ لنبحث عن $n_0\in\mathbb{N}^*$ بحيث $n>n_0\Rightarrow u_n>A$

لدينا $u_n>A$

يعني $\sqrt{n}>A$ يعني $n>A^2$

يكفي أن نأخذ $n_0\geq A^2$

مثلا: $n_0=E\left(A^2\right)+1$

لدينا: $n>n_0\Rightarrow n>A^2$

$\Rightarrow\sqrt{n}>A$

$\Rightarrow u_n>A$

إذن: $(\forall A>0)(n_0\in\mathbb{N}^*):n>n_0\Rightarrow u_n>A$

إذن: $\lim U_n=+\infty$

بنفس الطريقة نبين أن:

$$\left(p\in\mathbb{N}^*\right)\ \lim n^p=+\infty;\ \lim\frac{1}{n}=0;\lim\sqrt[p]{n}=+\infty$$

ملاحظة:

← $\lim|u_n|=0\Leftrightarrow\lim u_n=0$

← $\lim(u_n-l)=0\Leftrightarrow\lim u_n=l$

← $\lim|u_n-l|=0\Leftrightarrow\lim u_n=l$

← $\lim u_n=l\Rightarrow\lim|u_n|=|l|$ والعكس خاطئ

مثال: نعتبر $u_n=(-1)^n$

$|u_n|=1$ إذن $\lim|u_n|=1$

لكن (U_n) لا تقبل نهاية.

2- مصادق التقارب:

خاصية:

1) لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين بحيث: $|u_n-l|\leq v_n$ انطلاقا من صف ما.

لدينا: $\lim v_n=0\Rightarrow\lim u_n=l$

2) لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين بحيث: $u_n\leq v_n$ انطلاقا من صف ما:

$\lim u_n=+\infty\Leftrightarrow\lim v_n=+\infty$

$\lim v_n=-\infty\Leftrightarrow\lim u_n=-\infty$

3) لتكن (u_n) و (v_n) و (w_n) ثلاث متتاليات بحيث:

$w_n\leq u_n\leq v_n$ انطلاقا من صف ما.

إذا كانت (v_n) و (w_n) متقاربتين ولهما نفس النهاية l فإن: (u_n) متقاربة و $\lim u_n=l$.

أمثلة:

1- نعتبر المتتالية $U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{K}}$

لدينا: $u_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}$

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$:

لدينا: $\left(\forall K\in\{1,2,3,...,n\}\right)$:

$\sqrt{1}\leq\sqrt{K}\leq\sqrt{n}$

يعني $\left(\forall K\in\{1,2,3,...,n\}\right)\ \frac{1}{\sqrt{n}}\leq\frac{1}{\sqrt{K}}\leq1$

إذن $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\leq\sum_{k=1}^{n}1$

يعني $n.\frac{1}{\sqrt{n}}\leq u_n\leq n$

يعني $\sqrt{n}\leq u_n\leq n$

إذن $\sqrt{n}\leq u_n$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$

ولدينا $\lim\sqrt{n}=+\infty$ إذن $\lim u_n=+\infty$

2- نعتبر المتتالية: $U_n=q^n$

* إذا كان $q>1$

نضع $a=q-1$ (مع $a>0$) يعني $q=1+a$

لدينا: $q^n=(1+a)^n$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k.1^{n-k}.a^k=\sum_{k=0}^{n} C_n^k.a^k$$

$$=C_n^0.a_0+C_n^1.a^1+\sum_{k=2}^{n} C_n^k.a^k=1+na+\sum_{k=2}^{n} C_n^k.a^k$$

إذن $q^n-(1+na)=\sum_{k=2}^{n} C_n^k a^k \ge 0$

ولدينا $\lim 1+na=+\infty$ إذن $\lim q^n=+\infty$

إذا كان $q=1$:

فإن $\lim q^n=1$

* إذا كان $-1\langle q\langle 1$ مع $q\neq 0$:

$$\lim\left|q^n\right|=\lim|q|^n=\lim\frac{1}{\left(\frac{1}{|q|}\right)^n}$$

ولدينا $-1\langle q\langle 1$ يعني $|q|\langle 1$

يعني $\frac{1}{|q|}\rangle 1$ إذن من خلال ما سبق:

$$\lim\frac{1}{|q|^n}=+\infty$$

إذن $\lim\frac{1}{\left(\frac{1}{|q|}\right)^n}$

ومنه $\lim q^n=0$

* إذا كان $q\le -1$

نقبل أن (U_n) لا تقبل نهاية.

خاصية:

$$\lim q^n=\begin{cases}+\infty & ; & q\rangle 1\\ 1 & ; & q=1\\ 0 & ; & -1\langle q\langle 1\\ & ; & q\le -1\end{cases}$$

3) التقارب والرتابة:

خاصية (1):

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية.
إذا كانت (U_n) متقاربة وموجبة انطلاقا من صف ما فإن: $\lim u_n\ge 0$

استنتاج:

*) لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين
إذا كانت $u_n\le v_n$ انطلاقا من صف ما.
فإن $\lim u_n\le\lim v_n$

ملاحظة:

(u_n) و (v_n) متقاربتان.
إذا كان $u_n\le v_n$ فإن $\lim u_n\le\lim v_n$
$u_n\langle v_n \not\Rightarrow \lim u_n\langle\lim v_n$

مثال: $u_n=\frac{1}{n+1}$, $v_n=\frac{1}{n}$

لدينا: $u_n\langle v_n$

لكن $\begin{cases}\lim u_n=0\\ \lim v_n=0\end{cases}$ $\lim u_n=\lim v_n$

خاصية (2): مقبولة.

+ كل متتالية تزايدية ومكبورة. متقاربة.
+ كل متتالية تناقصية ومصغورة. متقاربة.

حالة خاصة:

*) كل متتالية تناقصية وموجبة. متقاربة.
*) كل متتالية تزايدية وسالبة. متقاربة.

تمرين تطبيقي:

بين أن (U_n) متقاربة في الحالات التالية:

1- $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

2- $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$

4- العمليات على المتتاليات المتقاربة.

خاصية:

إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين فإن المتتاليات (u_n+v_n) , (u_nv_n) , (αu_n) متقاربة

$$\lim(u_n+v_n)=\lim u_n+\lim v_n$$
$$\lim(u_n.v_n)=\lim u_n.\lim v_n$$
$$\lim(\alpha u_n)=\alpha\lim u_n$$

- وإذا كان $\lim v_n\neq 0$ فإن $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ متقاربة.

و $\lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{\lim u_n}{\lim v_n}$

مثال : نعتبر المتتالية: $u_n=\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$

$$\lim u_n=\lim\frac{3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}=\lim\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1$$

5) توسيع مفهوم النهاية:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n+v_n)$
l	l'	$l+l'$
l	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n.v_n)$
l	l'	ll'
$l\neq 0$	∞	∞ (الإشارة)
∞	∞	∞
0	∞	شكل غير محدد
$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim\left({u_n}/{v_n}\right)$
l	$l'\neq 0$	${l}/{l'}$

$l\neq 0$	0	∞
l	∞	0
∞	∞	شكل غير محدد
0	0	شكل غير محدد

VI- المتتاليات المتحادية:

تعريف:

نقول إن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متحاديتان إذا وفقط إذا كان:

*) $U_n \le V_n \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

*) (U_n) تزايدية و (V_n) تناقصية.

*) $\lim(V_n - U_n)=0$.

خاصية:

إذا كانت (U_n) و (V_n) متحاديتين فإنهما متقاربتان ولهما نفس النهاية.

برهان: لدينا $U_n \le V_n$

لدينا (U_n) تزايدية إذن $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_0 \le u_n$

و (V_n) تناقصية إذن $(\forall n\in\mathbb{N})\ v_n \le v_0$

لدينا إذن: $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_0 \le u_n \le v_n \le v_0$

إذن (U_n) تزايدية ومكبورة ب v_0 إذن متقاربة.

(V_n) تناقصية ومصغورة ب u_0 إذن متقاربة.

ولدينا $\lim(v_n-u_n)=0$

يعني $\lim v_n - \lim u_n = 0$

أي $\lim v_n = \lim u_n$

إذن (U_n) و (V_n) متقاربتان ولهما نفس النهاية.

مثال:

نعتبر المتتاليتين: $u_n=\dfrac{n}{1+n} \quad ; \quad v_n = 1+\dfrac{1}{n!}$

لنبين أن (U_n) و (V_n) متحاديتان.

لدينا: $v_n-u_n = 1+\dfrac{1}{n!}-\dfrac{n}{1+n}$

$$=\frac{(1+n)n!+(1+n)-n(n!)}{(1+n)!}=\frac{(1+n)!+(1+n)-n(n!)}{(1+n)!}$$

$$=\frac{n!+n+1}{(1+n)!}>0$$

إذن $u_n < v_n \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

* لدينا:

$$v_{n+1}-v_n = 1+\frac{1}{(1+n)!}-1-\frac{1}{n!}$$

$$=\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(n+1)}-1\right)=\frac{1}{n!}\left(\frac{-n}{n+1}\right)<0$$

إذن (V_n) تناقصية.

* لدينا:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}$$

$$=\frac{(n+1)^2-n(n+2)}{(n+2)(n+1)}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}>0$$

إذن (U_n) تزايدية.

* لنحسب: $\lim(v_n-u_n)$

لدينا:

$$v_n-u_n=\frac{n!+n+1}{(1+n)!}=\frac{n!}{(1+n)!}+\frac{n+1}{(1+n)!}$$

$$=\frac{1}{1+n}+\frac{1}{n!}$$

ولدينا: $(n-1)!\ge 1$ إذن $n(n-1)!\ge n$

أي $n!\ge n$

يعني $0<\dfrac{1}{n!}\le\dfrac{1}{n}$

ولدينا $\lim\dfrac{1}{n}=0$

إذن $\lim\dfrac{1}{n!}=0$

و أيضا $\lim\dfrac{1}{1+n}=0$

إذن $\lim(v_n-u_n)=0$

ومنه (U_n) و (V_n) متحاديتان.

VII- المتتاليات الترجعية. $u_{n+1}=f(u_n)$

مثال:

نعتبر المتتالية: $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+2}{u_n}\end{cases}$

لندرس سلوك المتتالية (U_n)

نعتبر الدالة: $f(x)=\dfrac{x+2}{x}$

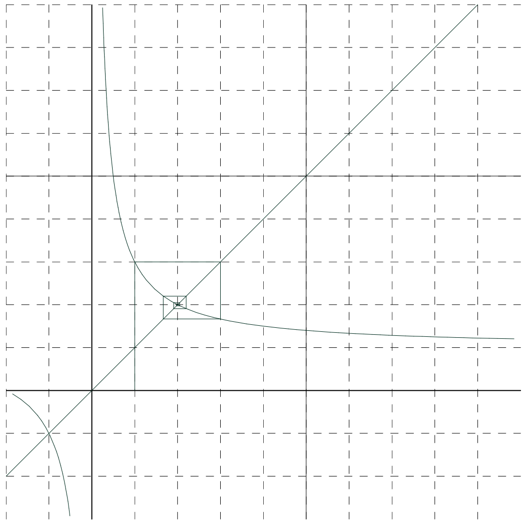
إذن (U_n) تصبح: $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

لننشئ ξ_f:

$D_f=\mathbb{R}^*$

$f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	‖	-
f	↘	‖	↘



من خلال التمثيل المبياني يتبين أن سلوك المتتالية كالتالي:
- (U_n) ليست رتيبة.
- (U_n) مصغورة ب u_0 ومكبورة ب u_1
- (u_2) تؤول إلى 2 الذي هو حل المعادلة $f(x)=x$
- المتتالية: $v_n = u_{2n}$ تزايدية.
- المتتالية: $w_n = u_{2n+1}$ تناقصية.
- $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n < w_n$
- (v_n) و (w_n) متحاديتان.

ثم نقوم بالبرهان على هذه النتائج.

خاصية:

لتكن f دالة معرفة على مجال I ونعتبر المتتالية:

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

إذا كانت $f(I) \subset I$ فإن المتتالية معرفة.

إذا كانت f متصلة على I و (u_n) متقاربة فإن نهايتها l تحقق $f(l)=l$