

ح.بوعيون	الحسابيات في $\mathbb{Z}$ (1)	الثانية ع ر سلسلة 7
----------	----------------------------------	------------------------

تمرين 8 ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $n \in \mathbb{N}^*$. (1) بين أن $a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$ (2) استنتج أن $a^n / b^n = a / b$ (3) بين أن $(\forall x \in \mathbb{Q}^*): x^n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$	تمرين 1 (1) ما هو باقي قسمة العدد 1996^{1996} على 11 . (2) حدد باقي قسمة العدد $2222^{3333} + 3333^{2222}$ على 5 . (3) (a) $(\forall n \in \mathbb{N}) : 9/n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1$ (b) $(\forall n \in \mathbb{N}) : 6/n(2n+1)(7n+1)$ (4) (a) حدد بواقي القسمة الأقليدية للأعداد 4^n على 7 . (b) حدد حسب قيم العدد n باقي قسمة العدد : $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 2$ على 7 . (5) بين أنه إذا كان n عدد طبيعي غير مضاعف لـ 3 فإن $5^{2n} + 5^n + 1 \equiv 0 [31]$.
تمرين 9 نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) $3x - 5y = 13$ (1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) . (2) حدد الحلول (x, y) للمعادلة (1) بحيث $\frac{x}{y} \in \mathbb{Z}$. (3) بين أنه لكل k من $\mathbb{Z}$ لدينا : $(5k+1) \wedge (3k-2) = (k-5) \wedge 13$ (4) حل في $\mathbb{Z}^2$ النظام : $\begin{cases} 3x-5y=13 \\ x \wedge y=13 \end{cases}$	تمرين 2 حل في $\mathbb{Z}$ المعادلتين : (1) $n+8 \equiv 0 [n-2]$ (2) $3n-2 \equiv 0 [n+3]$.
تمرين 10 (1) بين أن : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a^2 + b^2) \wedge ab = 1$ لكل a و b من $\mathbb{Z}^*$. (2) نعتبر في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ النظام : $(S): \begin{cases} x^2 + y^2 = 1300 \\ (x \wedge y).(x \vee y) = 600 \end{cases}$ ليكن (x, y) حل للنظمة (S) و $d = x \wedge y$ (a) بين أن $d = 10$. (b) حل للنظمة (S) .	تمرين 3 ليكن A عدد فردي ومجموع مربعين كاملين . ما هو باقي قسمة A على 4 ؟ تمرين 4 ليكن a و b و c و d من $\mathbb{Z}^*$ بحيث $a \wedge b = c \wedge d = 1$ بين أن $ac \wedge bd = (a \wedge d).(b \wedge c)$
تمرين 11 (1) بين أن $(5n^3 - n) \wedge (n+2) = (n+2) \wedge 38$ (2) حدد قيم n التي يكون من أجلها $n + 2/5n^3 - n$. (3) حدد القيم الممكنة للعدد $d = (5n^3 - n) \wedge (n+2)$ (4) حدد قيم n التي يكون من أجلها $(5n^3 - n) \wedge (n+2) = 19$	تمرين 5 (1) ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ بحيث $a \wedge b = 1$. أحسب (a) $(11a + 5b) \wedge (13a + 6b)$ (b) $(a^3 - b^3) \wedge (a^2 - b^2)$ (2) أحسب $(n!+1) \wedge ((n+1)!+1)$
تمرين 12 ليكن m و n و p أعداد من $\mathbb{Z}$ بحيث : $mnp \equiv 0 [7]$ بين أن $m^3 + n^3 + p^3 \equiv 0 [7]$.	تمرين 6 بين أنه لكل $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا (1) $(21n+4) \wedge (14n+3) = 1$ (2) $(n^3 + 2n) \wedge (n^4 + 3n^2 + 1) = 1$ (3) $(2^n + 3^n) \wedge (2^{n+1} + 3^{n+1}) = 1$
تمرين 13 لكل $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ نضع $a = n^2 - 3n + 6$ و $b = n - 1$ (1) بين أن : $a \wedge b = b \wedge 4$ (2) استنتج $a \wedge b$ حسب قيم العدد n .	تمرين 7 حل في $\mathbb{N}^{*2}$ النظمات التالية : (1) $\begin{cases} xy = 1512 \\ x \vee y = 252 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x + y = 48 \\ x \wedge y = 6 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x \wedge y = 5 \\ x \vee y = 30 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x + y = 276 \\ x \vee y = 1440 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x \vee y = 210(x \wedge y) \\ y - x = x \wedge y \end{cases}$ (7) $\begin{cases} x \vee y - 3(x \wedge y) = 108 \\ 10 \leq x \wedge y \leq 15 \end{cases}$ (8) $x \vee y - (x \wedge y) = 187$

تمرين 14

- في كل ما سيأتي a و b عددين من Z^* أوليان فيما بينهما .
 نضع $n = a^4 + b^4$.
 (1) a بين أن $(\forall k \in Z) : (2k+1)^4 \equiv 1[16]$ (لاحظ أن $2/k(k+1)$)
 (b) استنتج من ذلك أن $n \equiv 1[16]$ أو $n \equiv 2[16]$.
 (2) ليكن p قاسم أولي وفردى للعدد n .
 (a) بين أن $p \wedge a = 1$ و $p \wedge b = 1$ (بالخلف) .
 (b) بين أنه يوجد c من Z بحيث $ca \equiv -1[p]$.
 (c) استنتج أنه يوجد x من Z بحيث $x^4 \equiv -1[p]$.
 (d) باستعمال القسمة الأقليدية ل p على 8 ثم Fermat بين أن
 $p \equiv 1[8]$.

تمرين 15

- (1) a بين أن لكل a من Z : $a^2 \equiv 1[3]$ أو $a^2 \equiv 0[3]$
 (b) استنتج أن :
 $(\forall (a,b) \in Z^2) : a^2 + b^2 \equiv 0[3] \Rightarrow a \equiv b \equiv 0[3]$
 (2) ليكن $(x,y,z) \in Z^3$ بحيث $x^2 + y^2 = 3z^2$
 (a) بين أن : $x \equiv y \equiv 0[3]$ و $3z^2 \equiv 0[9]$
 (b) استنتج أن : $x \equiv y \equiv z \equiv 0[3]$

تمرين 16

- (1) حدد العدد x من IN بحيث $\overline{234x}_{(6)} \equiv 0[4]$
 (2) حدد a و b و c من IN بحيث

$$\begin{cases} \overline{bacb}_{(10)} \equiv 0[7] \\ \overline{bacb}_{(10)} \equiv 0[99] \end{cases}$$

 (3) حدد x و y و z من IN بحيث $\overline{xyz}_{(7)} = \overline{zyx}_{(11)}$

تمرين 17

- نعتبر في Z^2 المعادلة $x^2 + y^3 = 7$ (E)
 (I) بين أن المعادلة $x^2 + 1 \equiv 0[8]$ لا تقبل أي حل في Z .
 (II) نفترض فيما يلي ان المعادلة (E) تقبل حلا (x,y) .
 (1) بين أن y عدد فردي . نضع إذن $y = 2z + 1$.
 (2) تحقق أن $x^2 + 1 = (2 - y)m$ حيث $m = 4z^2 + 8z + 7$
 (3) بين أن $m \equiv 3[4]$.
 (4) ليكن $m = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_r^{\alpha_r}$ تفكيك m إلى جداء من عوامل أولية .

- (a) بين أن
 $(\forall i \in \{1, 2, \dots, r\}) : P_i \equiv 1[4]$ أو $P_i \equiv 3[4]$
 (b) بين بالخلف أنه يوجد $1 \leq i \leq r$ بحيث $P_i \equiv 3[4]$
 (5) استنتج مما سبق أنه يوجد عدد أولي p يحقق ما يلي :

$$\begin{cases} p \geq 3 \\ p \equiv 3[4] \\ x^2 + 1 \equiv 0[p] \end{cases}$$

(6) a بين أن $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$

(لاحظ أن $-1 \equiv x^2[p]$ واستعمل Fermat) .

- (b) استنتج أن $p \equiv 1[4]$.
 (7) ما هي مجموعة حلول المعادلة (E) ؟

تمرين 18

ليكن x عددا من IN^* بحيث : $\overline{36^{(x)}} + \overline{45^{(x)}} = \overline{103^{(x)}}$
 أحسب $\overline{36^{(x)}} \times \overline{45^{(x)}}$

تمرين 19

ليكن a و b و c اعدادا من IN بحيث $N \equiv \overline{abc}^{(10)}$
 بين أن $[17] \Rightarrow (2a - c)^2 + 2b^2 \equiv 0 [17]$ $N \equiv 0$

تمرين 20

- ليكن n عدد صحيح طبيعي بحيث $n \geq 6$.
 نضع $b = \overline{252}^{(n)}$ و $a = \overline{2310}^{(n)}$ و $d_n = a \wedge b$.
 (1) بين أن $(2n+1)/a$ و $(2n+1)/b$.
 (2) حدد بدلالة n العدد $\Delta_n = (n^2 + n) \wedge (n+2)$ (ناقش حسب زوجية العدد n)
 (3) بين أن $d_n \in \{2(2n+1), 2n+1\}$
 (4) نأخذ $n=6$, حل في Z^2 في المعادلة :
 $ax + by = -26$

تمرين 21

- نعتبر الأعداد x و y و z من IN بحيث :
 $z = \overline{101}^{(x)}$ و $y = \overline{131}^{(x)}$
 (1) أكتب الجداء $x.y.z$ في نظمة العد ذات الأساس X .
 (2) هل يمكن كتابة $x + y + z$ في نظمة العد ذات الأساس X ؟
 (3) إذا علمت أن : $x + y + z = 50$ (في نظمة العد العشري) فأحسب :
 $\overline{x.y.z}^{(10)}$ و $\overline{x + y + z}^{(x)}$
 (4) ليكن $N = \overline{342y}^{(x)}$, حدد قيم لكي يكون هذا العدد قابلا للقسمة
 أ - على 5 من أجل $x = 6$.
 ب - على 12 من أجل $x = 17$

تمرين 22

- (1) ليكن m و n عددين طبيعيين وأولييين فيما بينهما
 (a) بين أن $m+n$ و mn أوليان فيما بينهما .
 (b) بين أن أحد العددين $a+b$ و ab فردي والآخر زوجي .
 (2) ليكن x و y من IN^* , نضع
 $a = \frac{x}{\Delta}$ و $b = \frac{y}{\Delta}$ و $\Delta = x \wedge y$ و $M = x \vee y$
 (a) بين أن $\begin{cases} x+y=120 \\ M=\Delta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)ab=120 \\ ab=\Delta \end{cases}$
 (b) استنتج في IN^{*2} حلول النظمة $\begin{cases} x+y=120 \\ M=\Delta^2 \end{cases}$.

تمرين 23

- ليكن $d = A \wedge B; B = 4k; A = 9(k+3) \quad k \in \mathbb{N}^*$
- (1) بين أن $d/108$.
- (2) حدد قيم k التي يكون من أجلها (i) 2 لا يقسم d .
(ii) 3 لا يقسم d .
- (3) ليكن $k = 2 + 6m$ بين أن $d=1$.
- (b) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $Ax - By = 108$

تمرين 24

- في $\mathbb{N}^3$ نعتبر المعادلة (1) $x^2 + 2y^2 = z^2$
- (1) بين أن $(\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{*2}): \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow \frac{m}{n}$.
- (b) بين أنه يكفي أن تدرس الحالة التي يكون فيها $x \wedge y = 1$.
- فيما يلي نفترض أن $x \wedge y = 1$ في المعادلة (1) .
- (2) (a) بين أنه إذا كان (x, y, z) حلا للمعادلة (1) فإن x و z فرديان و y زوجي .
- (b) نضع $d = (z-x) \wedge (z+x)$ بين أن d زوجي واستنتج أن $d=2$
- (c) بين أنه إذا كان $a^2 = bc$ و $c \wedge b = 1$ فإنه يوجد c' و b' بحيث $b = b'^2$ و $c = c'^2$.
- (d) ليكن α و β من $\mathbb{N}$ بحيث $3-x = 2\alpha$ و $3+x = 2\beta$ بين أن α أو β زوجي واستنتج حلول المعادلة (1) .

تمرين 25

- ليكن $(n \in \mathbb{N}^*)$ ، نضع :
- $C_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ، $B_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ، $A_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- (1) بين أن A_n, B_n, C_n تنتمي ل $\mathbb{N}^*$.
- (2) احسب $A_n \wedge B_n$ (يمكن استعمال الموافقة بترديد 3)
- (3) نضع $D_n = C_n \wedge C_{n+1}$
- (a) احسب D_n (يمكن استعمال الموافقة بترديد n)
- (b) ليكن $\{1\} - \mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N}^* : \text{بين أن الأعداد } C_n, C_{n+1}, C_{n+2} \text{ أولية فيما بينها} .$
- تمرين 5 a و b من $\mathbb{Z}^*$ نضع $A = pa + qb$ و $B = ra + sb$ مع $(p, q, r, s) \in \mathbb{Z}^4$ وتحقق $ps - qr = 1$ و $A \neq 0, B \neq 0$ بين أن $A \wedge B = a \wedge b$.

تمرين 26

- (1) ليكن m و n عددين طبيعيين وأولين فيما بينهما .
- (a) بين أن $m+n$ و mn أوليان فيما بينهما .
- (b) بين أن أحد العددين $a+b$ و ab فردي والآخر زوجي .
- (2) ليكن x و y من $\mathbb{N}^*$ ، نضع
- $a = \frac{x}{\Delta}$ و $b = \frac{y}{\Delta}$ و $\Delta = x \wedge y$ و $M = x \vee y$

- (a) بين أن $\begin{cases} x+y=120 \\ M=\Delta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)ab=120 \\ ab=\Delta \end{cases}$
- (b) استنتج في $\mathbb{N}^{*2}$ حلول النظمة $\begin{cases} x+y=120 \\ M=\Delta^2 \end{cases}$.

تمرين 27

- بين أن $(\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2): a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge b(a+b) = 1$
- (2) ليكن x و y من $\mathbb{N}^*$ بحيث $x(43-x) = y(x+y)$
- نضع $x = dx'$ و $y = dy'$ و $x \wedge y = d$
- (a) بين أن x'/d .
- (b) نضع $\alpha = \frac{d}{x'}$
- بين أن $\alpha(x'^2 + x'y' + y'^2) = 43$ واستنتج أن $\alpha=1$.
- (3) حل في $\mathbb{N}^{*2}$ المعادلة $x(43-x) = y(x+y)$

تمرين 28

- لكل $n \in \mathbb{N}^*$ نضع $x_n = 2^n - 1$
- (1) (a) بين أن $x_{n+1} = 2x_n + 1$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.
- (b) استنتج أن $x_{n+1} \wedge x_n = 1$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.
- (2) (a) بين أن : $n \equiv 0[6] \Leftrightarrow x_n \equiv 0[9]$ (لاحظ أن $2^6 \equiv 1[9]$)
- (b) استنتج أنه يوجد مالا نهاية له من الأعداد $n \in \mathbb{N}^*$ بحيث $n \wedge x_n \neq 1$
- (3) (a) بين أن $n/m \Rightarrow x_n/x_m$ $(\forall (n,m) \in \mathbb{N}^{*2})$.
- (b) ليكن m و n من $\mathbb{N}^*$. بين أنه إذا كان r باقي قسمة m على n فإن x_r هو باقي قسمة x_m على x_n (لاحظ أن $2^n \equiv 1[x_n]$)
- (c) استنتج أن $x_m \wedge x_n = x_n \wedge x_r$
- (d) بين باستعمال خوارزمية أقليدس أن :
- $(\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{*2}) : x_m \wedge x_n = x_{m \wedge n}$
- (II) فيما يلي نريد أن نبين أن :
- $(\forall k \in \mathbb{N}^*)(\exists i \in \{1,2,3,\dots,2k\}) : 2k+1 \mid x_i$
- نفترض العكس يعني :
- $(\exists k \in \mathbb{N}^*)(\forall i \in \{1,2,3,\dots,2k\}) : x_i \not\equiv 0[2k+1]$
- ليكن R_i باقي قسمة x_i على $2k+1$
- (1) تحقق أن : $1 \leq R_i \leq 2k$ $(\forall i \in \{1,2,3,\dots,2k\})$
- (2) (a) بين أن : $2^i \equiv 0[2k+1] \Leftrightarrow x_i \equiv 2k[2k+1]$
- (b) استنتج أن $R_i \neq 2k$ $(\forall i \in \{1,2,3,\dots,2k\})$
- (3) بين أن البواقي R_i مختلفة مثلي مثلي .
- (4) ماذا تستنتج ؟

تمرين 29

(1) ليكن x و y عدنان طبيعيان بحيث $x \wedge y = 1$

بين أن $x^\alpha \wedge y^\beta = 1$ لكل α, β من IN .

(2) ليكن $\frac{a}{b_1 b_2 \dots b_n}$ عددا جذريا غير منعدم بحيث $b_i \wedge b_j = 1$

$\forall i \neq j$. أثبت وجود أعداد صحيحة نسبية $a_1, a_2, \dots, a_n$ بحيث

$$\frac{a}{b_1 b_2 \dots b_n} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}$$

(3) ليكن a من Z^* و b من IN^* غير أولي. أثبت وجود أعداد نسبية غير

منعدمة $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ بحيث $b_i \wedge b_j = 1$

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}$$

تمرين 30

(a) بين أن لكل a من Z : $a^2 \equiv 1[3]$ أو $a^2 \equiv 0[3]$ (b) استنتج أن :

$$(\forall (a, b) \in Z^2) : a^2 + b^2 \equiv 0[3] \Rightarrow a \equiv b \equiv 0[3]$$

(2) ليكن $(x, y, z) \in Z^3$ بحيث $x^2 + y^2 = 3z^2$

(a) بين أن : $x \equiv y \equiv 0[3]$ و $3z^2 \equiv 0[9]$

(b) استنتج أن : $x \equiv y \equiv z \equiv 0[3]$

تمرين 31

(1) بين أن :

$$(\forall a, b) \in Z^2 : a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a+b) \wedge (a^2 + ab + b^2) = 1$$

(2) حل في Z^2 النظمة :

$$\begin{cases} 19(a+b) = 5(a^2 + ab + b^2) \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$$

(3) حل في Z^2 المعادلة :

$$19(a+b)(a \wedge b) = 5(a^2 + ab + b^2)$$