

فرض تجريبي مساهمة من أحد أصدقاء موقع رياضيات النجاح - مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

(1) لكل x من IR نضع $I(x) = \int_0^x e^t \cos(2t) dt$ ، مستعملا مكاملة بالأجزاء احسب $I(x)$ بدلالة x

(2) احسب نهاية المتتالية العددية $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفة كما يلي: $\forall n \in IN^* \quad v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{kf}{n}} \cos\left(\frac{2kf}{n}\right)$

تمرين 2 :

نعتبر في C المعادلة: $(E): z^2 + 2(1-i\sqrt{3})z - 4(1+i\sqrt{3}) = 0$
الجزء الأول

(1) بين أن مميز المعادلة (E) هو $\Delta = 16 e^{\frac{f}{3}i}$

(2) ليكن z_1 و z_2 حلي (E) حيث $\text{Re}(z_1) > 0$

(3) حدد كلا من z_1 و z_2 على الشكل الجبري

(4) بين أن: $z_1^2 = 4(-\sqrt{3} + i)$ وأن: $z_2 = i z_1$

(5) اكتب z_1^2 على الشكل المثلثي

(6) استنتج أن: $z_1 = \left[2\sqrt{2}; \frac{5f}{12}\right]$ ثم اكتب z_2 على الشكل المثلثي

الجزء الثاني

في المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ نعتبر النقطتين A و B ذات اللحقين z_1 و z_2 على التوالي و نعتبر R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{f}{2}$ ، صورة $M'(z')$ صورة $M(z)$ بالدوران R

(1) بين أن $R(A) = B$

(2) أ) بين أن: $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM}') \equiv \frac{f}{2} + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) [2f]$

ب) حدد (T) مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها تكون M و B و M' مستقيمية.

تمرين 3 :

الجزء الأول

نعتبر الدالة g المعرفة على IR^* بما يلي: $g(x) = 1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$

(1) ادرس تغيرات g على IR^* ثم ضع جدول تغيراتها

(2) استنتج أن $\forall x \in IR^* \quad g(x) > 0$

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي:
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1+e^x}; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(1) بين أن f متصلة في الصفر

(2) بين أن f قابلة للاشتقاق على IR^* وأن: $\forall x \in IR^* \quad f'(x) = \frac{g(x)}{\left(1+e^x\right)^2}$

(3) استنتج أن f تزايدية قطعاً على IR

الجزء الثالث

نعتبر الدالة F المعرفة على $[1; +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_1^{x^2} f(t) dt$

- 1) بين أن لكل x من $[1; +\infty[$: $f(c_x) = \frac{1}{x^2 - 1} F(x)$ ($\exists c_x \in]1; x^2[$)
- 2) استنتج أن لكل x من $[1; +\infty[$: $(x^2 - 1)f(1) \leq F(x) \leq (x^2 - 1)f(x^2)$
- 3) استنتج أن F قابلة للاشتقاق يمين 1
- 4) بين أن F قابلة للاشتقاق على $]1; +\infty[$ و حدد F'

الجزء الرابع

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي : $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{f(t)}{t^3} dt$

- 1) بين أن $(u_n)_{n \geq 1}$ تزايدية قطعاً
- 2) باستعمال مكاملة بتغيير المتغير بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \int_1^n \left(1 - \frac{e^u}{1 + e^u}\right) du$
- 3) استنتج u_n بدلالة n ثم احسب نهاية $(u_n)_{n \geq 1}$