

استعدادا لاجتياز فروضك	الأعداد العقدية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية
فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان		
تمرين 1: $(E): z^2 - 2iz - i - 1 = 0$		
	<p>لدينا: $\Delta = -4 + 4(i+1) = 4i = 2(2i) = 2(1+i)^2 = (\sqrt{2}(1+i))^2$</p> <p>منه: $z_2 = b = \frac{2i - \sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2} = \frac{-\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})i}{2}$ و $z_1 = a = \frac{2i + \sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2} = \frac{\sqrt{2} + (2 + \sqrt{2})i}{2}$</p> <p>بالتالي: $S = \left\{ \frac{\sqrt{2} + (2 + \sqrt{2})i}{2}; \frac{-\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})i}{2} \right\}$</p>	1
	<p>$a = i + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2} = e^{\frac{f}{2}i} + e^{\frac{f}{4}i} = e^{\frac{3f}{8}i} \left(e^{\frac{f}{8}i} + e^{-\frac{f}{8}i} \right) = 2 \cos\left(\frac{f}{8}\right) e^{\frac{3f}{8}i} = \left[2 \cos\left(\frac{f}{8}\right); \frac{3f}{8} \right]$</p> <p>$b = i - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2} \right) = e^{\frac{f}{2}i} - e^{\frac{f}{4}i} = e^{\frac{3f}{8}i} \left(e^{\frac{f}{8}i} - e^{-\frac{f}{8}i} \right) = 2i \sin\left(\frac{f}{8}\right) e^{\frac{3f}{8}i}$</p> <p>$b = 2 \sin\left(\frac{f}{8}\right) e^{\frac{f}{2}i} e^{\frac{3f}{8}i} = \left[2 \sin\left(\frac{f}{8}\right); \frac{7f}{8} \right]$</p>	2
	$\left \frac{b}{a} \right = \frac{2 \sin\left(\frac{f}{8}\right)}{2 \cos\left(\frac{f}{8}\right)} = \tan \frac{f}{8}$	أ
	<p>$\tan \frac{f}{8} = \left \frac{b}{a} \right = \frac{ b }{ a } = \frac{\sqrt{\frac{2 + (2 - \sqrt{2})^2}{4}}}{\sqrt{\frac{2 + (2 + \sqrt{2})^2}{4}}} = \sqrt{\frac{2 + 4 - 4\sqrt{2} + 2}{2 + 4 + 4\sqrt{2} + 2}}$</p> <p>$\tan \frac{f}{8} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2})^2}{4 - 2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2} = \sqrt{2} - 1$</p>	3 ب
(مع $p \in C$) $P(p)$ و $D(-1)$ و $C(i)$ و $B(b)$ و $A(a)$		
	<p>لدينا: $\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{a + b}{2} = \frac{2i}{2} = i = z_C$: منه C منتصف $[AB]$</p>	أ
	<p>لدينا: $\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} \in i IR$: منه $\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \frac{b}{a} = \tan\left(\frac{f}{8}\right) e^{\frac{7f}{8}i} = \tan\left(\frac{f}{8}\right) e^{\frac{f}{2}i} = \tan\left(\frac{f}{8}\right) i$</p> <p>بالتالي المثلث OAB قائم الزاوية في O</p>	ب
	<p>لدينا: $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} = \frac{b+1}{a+1} = \frac{-\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})i}{\sqrt{2} + (2 + \sqrt{2})i} + 1 = \frac{2 - \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})i}{2 + \sqrt{2} + (2 + \sqrt{2})i} = \frac{(2 - \sqrt{2})(1+i)}{(2 + \sqrt{2})(1+i)} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$</p> <p>منه: $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} \in IR$ بالتالي أن النقط A و B و D مستقيمية</p>	4 ج
<p>🌱 لاحظ أن الشكل الجبري هذه المرة هو مفتاح الحل، لذلك يجب دائما محاولة استعمال الشكلين الجبري و الهندسي في الأسئلة للتعرف على الشكل الذي سيفي بالغرض.</p>		
	<p>$ip+1 = p = 1 \Leftrightarrow i(p-i) = p = 1 \Leftrightarrow p-i = p = 1 \Leftrightarrow CP = OP$</p> <p>إذن P هي إحدى نقطتي تقاطع الدائرتين $(O;1)$ و $(C;1)$ و $OC = 1$ فإن المثلث OCP مثلث متساوي الأضلاع</p>	طريقة 1 د

بعد إنشاء شكل بسيط نجد أن: $p = \left[1; \frac{5f}{6}\right] = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ أو $p = \left[1; \frac{f}{6}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$$|ip+1|=|p|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} p\bar{p}=1 \\ (ip+1)(-i\bar{p}+1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p\bar{p}=1 \\ p\bar{p}+ip-i\bar{p}+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p\bar{p}=1 \\ ip-i\bar{p}+1=0 \end{cases}$$

$$|ip+1|=|p|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} p\bar{p}=1 \\ ip^2-i\bar{p}p+p=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p\bar{p}=1 \\ ip^2+p-i=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p\bar{p}=1 \\ p^2-ip-1=0 \end{cases}$$

$$\Delta = -1+4=3 \Rightarrow p = \frac{i+\sqrt{3}}{2} \text{ ou } p = \frac{i-\sqrt{3}}{2}$$

أحيانا الحل الهندسي يكون أبسط

طريقة
2

تمرين 2: في المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v})

ونعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة $M(z)$ من $M(z) \setminus (O, \vec{v})$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث: $z' = \frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}z$

$$z' = z \Rightarrow \frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}z = z \Rightarrow \frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}} = 1 \Rightarrow z-\bar{z} = z+\bar{z} \Rightarrow \bar{z} = 0 \Rightarrow z = 0$$

وهذا غير ممكن، بالتالي f لا يقبل أي نقطة صامدة

$$z' = 0 \Leftrightarrow \frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}z = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

هو المحور الحقيقي محروم من النقطة O

نضع $z = x + iy$ حيث $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$|z'| = |z| \Leftrightarrow \left| \frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}z \right| = |z| \Leftrightarrow |z-\bar{z}| = |z+\bar{z}| \Leftrightarrow |2iy| = |2x| \Leftrightarrow |y| = |x| \Leftrightarrow y = x \text{ ou } y = -x$$

إذن (P) هو اتحاد المستقيمين $(\Delta_1): y = x$ و $(\Delta_2): y = -x$ محروم من النقطة O

$$z' - z = \frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}z - z = \left(\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}} - 1 \right) z = \frac{-2\bar{z}}{z+\bar{z}}z = \frac{-2z\bar{z}}{z+\bar{z}} \in \mathbb{R}$$

ما يعني أن $z' - z = \frac{-2z\bar{z}}{z+\bar{z}} \times 1 = \frac{-2z\bar{z}}{z+\bar{z}} z'_u$ أي أن MM' و \vec{u} مستقيمتان

أي أن المستقيم (MM') له اتجاه ثابت هو اتجاه المحور الحقيقي

$$\text{لدينا: } \frac{z'}{z} = \frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}} = \frac{y}{x}i \in i\mathbb{R} \text{ منه } (OM) \perp (OM')$$

إذا كانت M نقطة من المحور الحقيقي فإن $M' = O$

إذا كانت M نقطة خارج المحور الحقيقي، فإن M' هي نقطة تقاطع المستقيم المار من M و الموازي

للمحور الحقيقي مع المستقيم المار من O و العمودي على (OM)

$$z' = \frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}z = \frac{re^{i\theta} - re^{-i\theta}}{re^{i\theta} + re^{-i\theta}} re^{i\theta} = r \frac{2i \sin \theta}{2 \cos \theta} e^{i\theta} = r \tan \theta e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = r (-\tan \theta) e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2} + \pi\right)}$$

$$z' = \left[-r \tan \theta ; \theta + \frac{3\pi}{2} \right]$$

و هذا سبب إدراج الإشارة لأن الشكل الهندسي يتوجب أن يكون المعيار موجبا $\frac{f}{2} < \theta < f \Rightarrow \tan \theta < 0$

تمرين 3: $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ و $M(z)$ ، $M' = F(M) / M'(z')$ ($w \in \mathbb{C}^*$) $z' = wz + a - aw$

الحالة: $w = 5$ ، $z' = 5z - 4a$

F هو تحاك نسبته 5 و مركزه هي النقطة الصامدة أي النقطة ذات اللحق: أي النقطة A

الحالة: $w = 1$ ، $z' = z$ ، F هو التطبيق المطابق

الحالة: $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z' - a = e^{\frac{f}{3}i} (z - a)$ أي $z' = e^{\frac{f}{3}i} z + a - ae^{\frac{f}{3}i}$

F هو الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{f}{3}$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \text{ ، } C = F(N) \text{ ، } M = F(B) \text{ ، } P(p) \text{ و } N(n) \text{ و } M(m) \text{ ، } w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$M = F(B) \Rightarrow m = wb + (1-w)a \quad \text{أ}$$

$$\frac{w-1}{w} = w \text{ : منه } w^2 = w-1 \text{ : منه } w^2 - w + 1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = 0 \text{ : لدينا}$$

$$c = w(n-a) + a = wn + (1-w)a \text{ : منه } C = F(N) \text{ لدينا} \quad \text{ب}$$

$$n = \frac{c - (1-w)a}{w} = \frac{c - wc + wc}{w} + \frac{w-1}{w}a = \frac{(1-w)c}{w} + c + wa = -wc + c + wa = w(a-c) + c \text{ : منه}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \text{ : لدينا} \text{ : منه } p - a = m - a + n - a \text{ : منه}$$

$$p = m + n - a = wb + (1-w)a + w(a-c) + c - a = wb + (1-w)c \quad \text{ج}$$

$$P = R\left(C, \frac{f}{3}\right)(B) \text{ : لدينا } p = wb + (1-w)c = w(b-c) + c \text{ : منه}$$

بالتالي PBC مثلث متساوي الأضلاع د