

تمرين 1 (5نقط)

1-1- ليكن p عددا أوليا بحيث $p > 2$ أثبت أن p/C_p^k $\forall k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$

ب- استنتج أن $\forall x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1[p] \Rightarrow x^p \equiv 1[p^2]$

1-2- حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E): $23x - 840y = 1$

ب- أوجد الزوج (d, e) الوحيد الذي يحقق (E) و $0 \leq d < 840$ و $0 \leq e < 23$

3- فكك 2009 إلى جداء عوامل أولية

4- ليكن a من \mathbb{Z} بحيث $a \wedge 2009 = 1$

أ- بين أن $a^6 \equiv 1[7]$ و $a^{40} \equiv 1[41]$

ب- بين أن $\forall x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1[7] \Rightarrow x^7 \equiv 1[7^2]$ و استنتج أن $a^{42} \equiv 1[7^2]$

ج- تحقق أن: $42 \vee 40 = 840$ و استنتج أن $\begin{cases} a^{840} \equiv 1[41] \\ a^{840} \equiv 1[7^2] \end{cases}$

د- بين أن $a^{840} \equiv 1[2009]$

تمرين 2 (5نقط)

نرمز ب $D(\mathbb{R})$ لمجموعة الدوال القابلة للاشتقاق على \mathbb{R} نعتبر المجموعة:

$$E = \left\{ f \in D(\mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R} : f'(x) - f(x) = 2 \int_0^x f(t) dt \right\}$$

1- بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

2- حل المعادلة التفاضلية $y'' - y' - 2y = 0$

3- بين أن: $f \in E \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0$

4- نعتبر الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي: $\varphi_1(x) = e^{-x}$, $\varphi_2(x) = e^{2x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

أ- بين أن $\varphi_1 \in E$ و $\varphi_2 \in E$

ب- بين أن (φ_1, φ_2) أساس للفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$

ج- حدد زوج إحداثيات دالة f من E في الأساس (φ_1, φ_2)

تمرين 3 (6نقط)

يحتوي كيس على 3 كرات سوداء و كرة بيضاء (متشابهة في اللمس). نعتبر التجربة التالية: نرمي قطعة نقدية متزنة مرة واحدة في الفضاء، إذا سقطت على ظهرها نضيف كرة بيضاء إلى الكيس و إذا سقطت على وجهها نضيف كرة سوداء إلى الكيس ثم نسحب تانيا ثلاث كرات من الكيس

1- E_0 الحدث "الكرات الثلاث المسحوبة سوداء" و B الحدث "القطعة النقدية سقطت على وجهها"

أ- أحسب $p(E_0 \cap B)$ و $p(E_0 \cap \bar{B})$ ثم $p(E_0)$

ب- علما أن الكرات المسحوبة سوداء ما هو الاحتمال أن تكون القطعة النقدية سقطت على ظهرها؟

2- E_1 الحدث "توجد كرة بيضاء واحدة من بين الكرات الثلاث المسحوبة"

أ- أحسب احتمال الحدث E_1

ب- نعيد التجربة أربع مرات متتالية. ما هو احتمال تحقيق الحدث E_1 على الأقل مرة واحدة؟

تمرين 4 (4نقط)

ليكن a عددا عقديا مخالفا للعدد العقدي $1+i$.

1- أ- أنشر العدد $(ia - 1 - i)^2$.

ب- حل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 2(a+1-i)z + 2a^2 - 4i$

2- في المستوى العقدي المنسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر، نعتبر النقطتين A و B التي لهما على التوالي هما:

$$z_A = (1+i)a - 2i \quad \text{و} \quad z_B = (1-i)a + 2$$

ونعتبر التطبيق R الذي يربط كل نقطة M من المستوى لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z' بحيث: $z' = -iz + 4$

أ- بين أن R دوران محدد مركزه Ω وزاويته.

ب- تحقق من أن $R(A) = B$ و استنتج أن المستقيمين (ΩI) و (AB) متعامدان.

ج- ليكن α عددا حقيقيا. نضع $a = \alpha(1+i) - 2i$ ولنكن C النقطة التي لحقها a . بين أن النقط A و B و C مستقيمية.