منـــارة الـفـردوس	فرض محروس رقم 02	2 بكالوريا علوم رياضية
نيابة الخميسات	الدورة الأولى 2011/2010	ذ : عبدالله بن لختير
		مدة الإنجاز : أربع ساعات

- **التمرين رقم 01**: $\left(03pts\right)$

لتكن f_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

. $n \in \mathbb{N}^*$ حيث ، $f_n\left(x\right) = x^n - 1 + \mathrm{Arctan}\left(x\right)$

1)- بين أن المعادلة : $f_n\left(x\right) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}^+$ و أن $0 < \alpha_n < 1$.

2)- بين أن : $\left(\forall x \in \left]0,1\right[\right), f_{n+1}\left(x\right) < f_n\left(x\right)$ ، ثم إستنتج رتابة المتتالية $\left(\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3)- بين أن المتتالية $\left(\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة و أعط تأطيرا لنهايتها .

4)- أثبت بالخلف أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$.

- **التمرين رقم 02**: $\left(04pts\right)$

I- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f\left(x\right) = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{2}{3}$.

1)- بين أن f متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$.

2)- حل في $\mathbb{R}^+$ المعادلة : $f\left(x\right) = x$ و أدرس إشارة $f\left(x\right) - x$.

3)- حدد ما يلي : $f\left(\left[0,1\right]\right)$ و $f\left(\left[1,2\right]\right)$ و $f\left(\left[2,+\infty\right[\right)$.

II- لتكن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

. $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right), u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ و $u_0 \in \mathbb{R}^+$

1)- حدد شرطا كافيا و لازما لكي تكون المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ثابتة .

2)- نفترض أن $u_0 \in \left[0,1\right[$ ، بين أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها .

3)- نفترض أن $u_0 \in \left]1,2\right[$ ، بين أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها .

4)- نفترض أن $u_0 \in \left]2,+\infty\right[$، بين أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية قطعا وأثبت أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

- **التمرين رقم 03**: $(03pts)$

لتكن الدالة f المعرفة على $I =]0,1]$ بما يلي : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos(\pi x)}}$.

1)- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J ينبغي تحديده .

2)- أدرس قابلية إشتقاق الدالة f^{-1} على J ، ثم أحسب $(f^{-1})'(x)$ لكل $x \in J - \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

3)- بين أن المعادلة : $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $I =]0,1]$.

4)- لتكن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), S_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n^2} f^{-1}\left(\alpha + \dfrac{1}{n^2+k}\right)$.

أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), f^{-1}\left(\alpha + \dfrac{1}{n^2+1}\right) \le S_n \le f^{-1}\left(\alpha + \dfrac{1}{2n^2}\right)$.

ب- إستنتج أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها .

- **التمرين رقم 04**: $(04pts)$

ليكن $x \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\}$.

و لتكن المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), a_n = \sqrt[2^n]{x}$.

1)- نفترض أن $x \in]0,1[$ ، بين أن المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تزايدية قطعا و إستنتج أنها متقاربة .

2)- نفترض أن $x \in]1,+\infty[$ ، بين أن المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تناقصية قطعا و إستنتج أنها متقاربة .

3)- بين أن لكل $n \in \mathbb{N}^*$: $(a_{n+1})^2 = a_n$ ، ثم أحسب نهاية المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

⇦ نعتبر المتتاليتين $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفتين بما يلي :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), b_n = 2^n(a_n - 1) \quad \text{و} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*), c_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{a_n}\right) .$$

4)- بين أن المتتاليتين $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متحاديتان (غير مطلوب حساب نهايتيهما المشتركة) .

5)- لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ، نضع : $d_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\sqrt{a} - \sqrt[2k+1]{a}\right)$ ، حيث a عدد حقيقي من المجال $]1,4[$.

⇦ بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), 0 < d_n < \left(\sqrt{a} - 1\right)^n$ ، ثم إستنتج أن $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها .

- **التمرين رقم 05:** $\left(06pts\right)$

I- نعتبر الدالة φ المعرفة على $\left[0,\pi\right]$ بما يلي : $\varphi\left(x\right)=\cos\left(x\right)$.

1)- بين أن φ تقبل دالة عكسية φ^{-1} محددا مجموعة تعريفها $D_{\varphi^{-1}}$.

2)- بين أن φ^{-1} قابلة للإشتقاق على $\left]-1,1\right[$ و أن : $\left(\forall x\in\left]-1,1\right[\right),\left(\varphi^{-1}\right)'\left(x\right)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $I=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ بما يلي : $f\left(x\right)=\varphi^{-1}\left(\sin^2 x\right)$.

1)- بين أن f قابلة للإشتقاق على $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ و أن : $\left(\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right),f'\left(x\right)=\dfrac{-2\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

2)- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على f في المجال $\left[x,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ، حيث $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ أثبت ما يلي :

$$\frac{-2}{\sqrt{1+\sin^2 x}}<\frac{f\left(x\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}<\frac{-2\sin x}{\sqrt{2}} .$$

3)- إستنتج أن f قابلة للإشتقاق على اليسار في $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ و اعط تأويلا للنتيجة المحصل عليها .

4)- بين أن المعادلة : $f\left(x\right)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $I=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ و أن $\alpha=\varphi^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

5)- تحقق أن : $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$.

III- لتكن الدالة h المعرفة على $I=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ بما يلي : $h\left(x\right)=f\circ f\left(x\right)$.

1)- بين أن : $h\left(\left[0,\alpha\right]\right)\subset\left[0,\alpha\right]$ (تحديد صيغة $h\left(x\right)$ غير مطلوب) .

2)- لتكن $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$u_0=\frac{\pi}{4} \text{ و } \left(\forall n\in\mathbb{N}\right),u_{n+1}=h\left(u_n\right) .$$

⇦ بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),0<u_n<\alpha$ ، و أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية قطعا .

3)- بين أن : $\left(\forall x\in I\right),h\left(x\right)=\varphi^{-1}\left(1-\sin^4 x\right)$.

4)- بين أن لكل $x\in I$: $h\left(x\right)=x\Leftrightarrow x\in\left\{0,\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

5)- بين أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها . (إنتهى الموضوع)

⇦ **تمارين إضافية:**

- **التمرين رقم 01:** $(01pt)$

لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ، نضع : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$.

⇦ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة (حساب نهايتها غير مطلوب) .

- **التمرين رقم 02:** $(01pt)$

لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة بحيث : $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$ و $(\forall n \in \mathbb{N}), a_n \neq 1$.

⇦ أحسب النهاية : $\lim_{n\to+\infty} \frac{(a_n + a_n{}^2 + a_n{}^3 + \ldots + a_n{}^k) - k}{a_n - 1}$ ، حيث $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

- **التمرين رقم 03:** $(01pt)$

لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ، نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_n(x) = \sqrt[2n]{\cos^{2n}(x) + \sin^{2n}(x)}$.

⇦ حدد نهاية المتتالية $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$ تبعا لقيم العدد الحقيقي a .

- **التمرين رقم 04:** $(02pts)$

ليكن $a \in \mathbb{R}^*$ و $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$x_1 = a \quad \text{و} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*), x_{n+1} = x_n \left(1 + \frac{(-1)^n}{n(1+x_n{}^2)}\right) .$$

⇦ بين أن المتتالية $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), y_n = \frac{x_n}{n}$ تؤول إلى 0 .

⇦ تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .