التمرين الأول

ليكن m عددا عقديا غير منعدم . نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(E) \quad m^2Z^2+m^3Z+1-im^2=0$$

1) أ- حل المعادلة (E) من أجل $m=-1$

ب- حدد قيم m التي يكون من أجلها $u=1+i$ حلا للمعادلة (E) ثم حدد الحل الآخر في كل حالة

2) أ- تحقق أن مميز المعادلة (E) يكتب $\Delta=m^2\left(m^2+2i\right)^2$

ب- حدد Z_1 , Z_2 حلي المعادلة (E)

3) المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر في (P) النقط A , B , M التي ألحاقها على التوالي هي :

$a=-m-\dfrac{i}{m}$, $b=\dfrac{i}{m}$, m و نضع $Z=\dfrac{m-a}{m-b}$

أ- بين أن $\left(\arg(m)\equiv\dfrac{\pi}{4}\ [\pi] \text{ أو } \arg(m)\equiv-\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]\right)\Leftrightarrow\left(\overline{Z}=Z\right)$

ب- استنتج (Γ) مجموعة النقط $M(m)$ بحيث يكون A , B , M نقط مستقيمية

4) ليكن R الدوران الذي مركزه B و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$. نضع $A'=R(A)$ ،

$M'=R(M)$ و $B'=R^{-1}(M)$

أ- حدد a' لحق النقطة A' و بين أن لحق B' هو العدد $b'=-im+\dfrac{i-1}{m}$

ب- حدد m' لحق النقطة M' و بين أن B منتصف القطعة $[B'M']$

ج- ليكن I منتصف القطعة $[AM]$ و Z_I لحقها .

أحسب $\dfrac{b'-a'}{b-Z_I}$ و استنتج أن $(A'B')\perp(BI)$ و أن $A'B'=2BI$

التمرين الثاني

ليكن a ; b عددين من $\mathbb{Z}^*$ أوليين فيما بينهما . نضع $N=a^4+b^4$

1) بين أن $n^4\equiv 0\ [16]$ أو $n^4\equiv 1\ [16]$ لكل عدد n من $\mathbb{Z}$

2) استنتج أن $N\equiv 1\ [16]$ أو $N\equiv 2\ [16]$

3) ليكن p عددا طبيعيا أوليا أكبر أو يساوي 3 و قاسما للعدد N

أ- بين أن $p\wedge a=1$ و $p\wedge b=1$

ب- بين أن : $(\exists c\in\mathbb{Z})\ ac\equiv -1\ [p]$ و استنتج أن $(\exists x\in\mathbb{Z})\ x^4\equiv -1\ [p]$

ج- ليكن r باقي القسمة الأقليدية للعدد p على 8 .

(i) بين أن $x^{r-1}\equiv 1\ [p]$ $\quad$ (ii) بين أن $r=1$

التمرين الثالث

ليكن n عددا من $\mathbb{N}^*$ و نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$f_n(x)=\dfrac{1}{x}-(\ln x)^{2n+1}$ و (C_n) هو المنحنى الممثل للدالة f_n في $(O,\vec{i},\vec{j})$

(I) 1) أ- بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x(\ln x)^3=0$ و أحسب النهاية $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_1(x)$

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$

2) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^3}{x}=0$ و أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_1) عند $+\infty$

3) احسب المشتقة $f_1'(x)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f_1

4) بين أن المعادلة $f_1(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β_1 و أن $\beta_1\in\,]2,e[$

5) أرسم المنحى (C_1) (نأخذ $\beta_1\simeq 2{,}2$)

(II) 1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x)$

2) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل في المجال $[1,e]$ حلا وحيدا نرمز له بالرمز β_n

3) أ- أدرس على المجال $[1,e]$ إشارة الفرق $f_{n+1}(x)-f_n(x)$

ب- بين أن المتتالية $(\beta_n)_{n\geq 1}$ تزايدية

4) أ- بين أن $\dfrac{-1}{2n}\leq \ln(\ln\beta_n)$ $\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب- استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=e$