2bac sm	فرض رقم 2	14-2015

التمرين الأول :

نعتبر الدالة العدية f المعرفة بما يلي : $f(x) = x\arctan x$

(I) 1) أ- أدرس زوجية الدالة f

ب- أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

2) أحسب المشتقة $f'(x)$ و بين أن f تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$

3) أرسم المنحنى (C_f)

(II) 1) حل في $\mathbb{R}^+$ المتراجحة $f(x) > x$

2) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = \sqrt{3}$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ- بين أن $U_n \geq \sqrt{3}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ (نعطي $\tan(1) \simeq 1,56$)

ب- بين أن $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \geq \dfrac{\pi}{3}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ و استنتج أن $(U_n)_n$ تزايدية

ج- بين أن $U_n \geq \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^n \sqrt{3}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ و حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

(III) 1) بين أن المعادلة $f(x) = \dfrac{\pi n}{4n+1}$ تقبل في المجال $[0,+\infty[$ حلا وحيدا x_n

2) أدرس رتابة المتتالية $(x_n)_n$

3) بين أن $x_n < 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ و استنتج أن $(x_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثاني :

ليكن n عدد طبيعي بحيث $n > 2$.

نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = x^n - 2 - n(x-1)$

1) أدرس رتابة الدالة f_n

2) بين ان المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلين a_n و b_n مع $0 < a_n < 1 < b_n$

3) أ- أدرس إشارة الفرق $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

ب- استنتج رتابة المتتالية كل من المتتاليتين $(a_n)_n$ و $(b_n)_n$

4) بين أن $\dfrac{-2}{n} < a_n - 1 < \dfrac{-1}{n}$ $(\forall n > 2)$ و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

5) أ- بين أن $(1+x)^n \geq 1 + nx + C_n^2 x^2$ $(\forall n > 2)$ $(\forall x > 0)$

ب- استنتج إشارة $f_n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$ ثم أن $(b_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) = 1$