

الجزء (1) ليكن n عدد من \mathbb{N}^* ونعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$f_n(0)=0 \text{ و } f_n(x)=xe^{-\frac{1}{nx}} ; x \neq 0$$

(1) أ- بين أن f_n متصلة على يمين النقطة $x_0=0$ (0.5 ن)

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على يمين النقطة $x_0=0$ (0.5 ن)

(2) أ- أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ (0.5 ن)

ب- أحسب المشتقة $f'_n(x)$ و أدرس منحنى تغيرات الدالة f_n ثم ضع جدول تغيراتها (1 ن)

(3) نضع $g(t)=e^{-t}-(1-t)$ لكل t من المجال $[0, +\infty[$

أ- أدرس تغيرات الدالة g واستنتج أن $0 \leq 1-e^{-t} \leq t$ ($\forall t \in [0, +\infty[$) (1 ن)

ب- بين أن $0 \leq e^{-x}-(1-x) \leq \frac{x^2}{2}$ ($\forall x \geq 0$) (0.5 ن)

(4) أ- بين أن $0 \leq f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2x}$ ($\forall x > 0$) ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) (0.5 ن)

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) عند $+\infty$ (0.5 ن)

ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_n) والمقارب المائل (0.5 ن)

(5) أرسم المنحنى (C_1) للدالة f_1 (0.75 ن)

(6) بين أن المنحنى (C_n) هو صورة المنحنى (C_1) بالتحاكي $H\left(0, \frac{1}{n}\right)$ (0.5 ن)

الجزء (2) نضع $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

(1) بين أن $f_n(x) \leq x$ ($\forall x \in [0, 1]$) (0.5 ن)

(2) استنتج أن $I_n \leq \frac{1}{2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) (0.5 ن)

(3) بين أن $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq I_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) ثم حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ (0.75 ن)

الجزء (3)

(1) أ- بين أن المعادلة $f_n(x)=1$ تقبل حلا وحيدا a_n (0.5 ن)

ب- بين أن $a_n > 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) (0.5 ن)

(2) تحقق أن $a_n \ln a_n = \frac{1}{n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) (0.5 ن)

(3) أ- أدرس تغيرات الدالة $h(x)=x \ln x$ (0.5 ن)

ب- بين أن المتتالية $(a_n)_n$ تناقصية واستنتج أنها متقاربة (0.75 ن)

(4) نضع $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

أ- بين أن $a \geq 1$ وأن $h(a)=0$ (0.75 ن)

ب- استنتج قيمة النهاية a (0.25 ن)

الجزء (4)

لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$F(0)=0 \text{ و } F(x)=\int_x^{2x} f_1(t) dt ; x \neq 0$$

(1) أ- بين أن $0 < e^{-\frac{1}{t}} < 1$ ($\forall t > 0$) (0.5 ن)

ب- بين أن F متصلة على يمين $x_0=0$ (0.5 ن)

(2) بين أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = 0$ و أول النتيجة هندسيا (0.75 ن)

(3) أ- بين أن $e^t \geq t+1$ ($\forall t \in \mathbb{R}$) (0.5 ن)

ب- بين أن $F(x) \geq -x + \frac{3}{2}x^2$ ($\forall x > 0$) ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ (0.75 ن)

ج- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (Γ_F) عند $+\infty$ (0.5 ن)

(4) أ- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ وأن :

$$F'(x) = \left(4e^{\frac{1}{2x}} - 1\right) f_1(x) \quad (1 \text{ ن})$$

ب- أدرس تغيرات الدالة F وأنجز جدول التغيرات (0.75 ن)

(5) أرسم المنحنى (Γ_F) (1 ن)