

التمرين الأول

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \quad ; x > 0 \\ f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}} \quad ; x < 0 \\ f(0) = 0 \end{array} \right.$$

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بما يلي :

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم

1- أ- لحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 1

ب- بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ وأول النتيجة هندسيا 1

2- أ- بين أن الدالة f متصلة في 0 1

ب- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق في 0 وأن $f'(0) = 0$ وأول النتيجة هندسيا 1 + 1

3- أ- بين أن: $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} (x^2 - x - 2)$ لكل x من \mathbb{R}^* ، ثم ادرس 1

تغيرات الدالة f على \mathbb{R}^*

ب- بين أن: $(\forall x \in]0, +\infty[) x \ln x - (x+1) \ln(x+1) < 0$ ، ثم ادرس تغيرات 1

للدالة f على $\mathbb{R}^* - \{1\}$

ج- أعط جدول تغيرات الدالة f 1

4- أ- بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x+3)) = 0$ 1

ب- أنشئ المنحنى (C) (لاحظ أن $f(-2) = 0$ و $\frac{1}{e} \approx 0,4$) 1,5

5- أ- بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1, +\infty[$ 1

وأن: $1,76 < \alpha < 1,78$

ب- تحقق من أن: $f(]1, +\infty[) =]1, +\infty[$ 0,50

6- لتكن g قصور f على المجال $]1, +\infty[$. نضع: $h = g \circ g$

ونعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = h(u_n)$ لكل n من \mathbb{N}

أ- بين أن : $1 < u_n < \alpha$ لكل n من \mathbb{N}

ب- نفترض أنه يوجد عدد حقيقي k من $]0,1[$ بحيث $|\forall x \in]1, \alpha[| h'(x)| \leq k$

بين باستعمال مبرهنة التزايد المتناهية أن المتتالية (u_n) متقاربة وأن نهايتها α

الثاني : في المجموعة \mathbb{Z}^2 , نعتبر المعادلة: $(E): 8x - 5y = 3$ و (S) مجموعة تعريفها.

1) بين أن $S \neq \{\emptyset\}$, ثم حل المعادلة (E) .

2) ليكن m من \mathbb{Z} بحيث يوجد زوج $(p; q)$ من \mathbb{Z}^2 يحقق: $m = 8p + 5$ و $m = 5q + 8$.

بين أن : $(p; q) \in (S)$.

استنتج أن : $m \equiv 13 [40]$.

3) حدد أصغر قيم m الأكبر من 2000.

4) بين أن : $\forall k \in \mathbb{Z} : 2^{3k} \equiv 1 [7]$.

5) حدد باقي القسمة الاقليدية للعدد 2^{2014} على 7.

6) تحقق أن 97 عدد أولي, ثم بين أن : $2^{96} \equiv 1 [679]$.