تصحيح الواجب المحروس 1 ج 4
الدورة الثانية

مسألة:

لتكن f_n الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}} \; ; x\neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$ حيث n من $\mathbb{N}^*$

الجزء الأول:

1- أ- اتصال f_n على يمين 0:

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} xe^{-\frac{n}{x}}$

وبما أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(-\frac{n}{x}\right) = -\infty$

أي $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{n}{x}} = 0$

فإن $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$

وهذا يعني أن الدالة f_n متصلة على يمين $x_0=0$.

ب- قابلية اشتقاق الدالة f_n على يمين $x_0=0$:

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{n}{x}}$
$= 0$

[حسب حل السؤال 1 الجزء أ منه]

وعليه فإن الدالة f_n قابلة للاشتقاق على يمين $x_0=0$ و $(f_n)'_d(0)=0$.

2- أ- حساب المشتقة $f_n'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$:

لدينا $f_n'(x) = \left(xe^{-\frac{n}{x}}\right)'$

$= e^{-\frac{n}{x}} + x\times\left(-\frac{n}{x}\right)' e^{-\frac{n}{x}}$

$= e^{-\frac{n}{x}} + \frac{n}{x}e^{-\frac{n}{x}}$

$\boxed{f_n'(x) = \left(1+\frac{n}{x}\right)e^{-\frac{n}{x}}}$; $x\in]0,+\infty[$

ب- دراسة تغيرات الدالة f_n وجدول تغيراتها:

لدينا: $e^{-\frac{n}{x}} > 0$ $(\forall x>0)$

و $1+\frac{n}{x} > 0$

إذن: $f_n'(x) > 0$

وهذا يعني أن f_n دالة تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$.

وبالتالي فجدول تغيراتها كالتالي:

x	0		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$+$	
f_n	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ- دراسة الفرع اللانهائي للمنحنى C_n:

لدينا $\lim\limits_{+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{+\infty} xe^{-\frac{n}{x}}$

وبما أن $\lim\limits_{+\infty} -\frac{n}{x} = 0$

والدالة $x \mapsto e^x$ متصلة في 0

فإن $\lim\limits_{+\infty} e^{-\frac{n}{x}} = e^0 = 1$

مع $\lim\limits_{+\infty} x = +\infty$

يكون لدينا $\left\{\lim\limits_{+\infty} f_n(x) = +\infty\right\}$

ولدينا $\lim\limits_{+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{n}{x}}$

$= 1$

[حسب ما سبق]

ولدينا أيضا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) - x$

$= \lim\limits_{+\infty} x\left(e^{-\frac{n}{x}} - 1\right)$

$= \lim\limits_{+\infty} -n\left(\frac{e^{-\frac{n}{x}}-1}{\left(-\frac{n}{x}\right)}\right)$

وبما أن $\frac{n}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

فإن $\lim_{+\infty} \frac{e^{-\frac{n}{x}}-1}{\left(-\frac{n}{x}\right)}$

$= \lim_{X\to 0} \frac{e^{X}-1}{X} = 1$

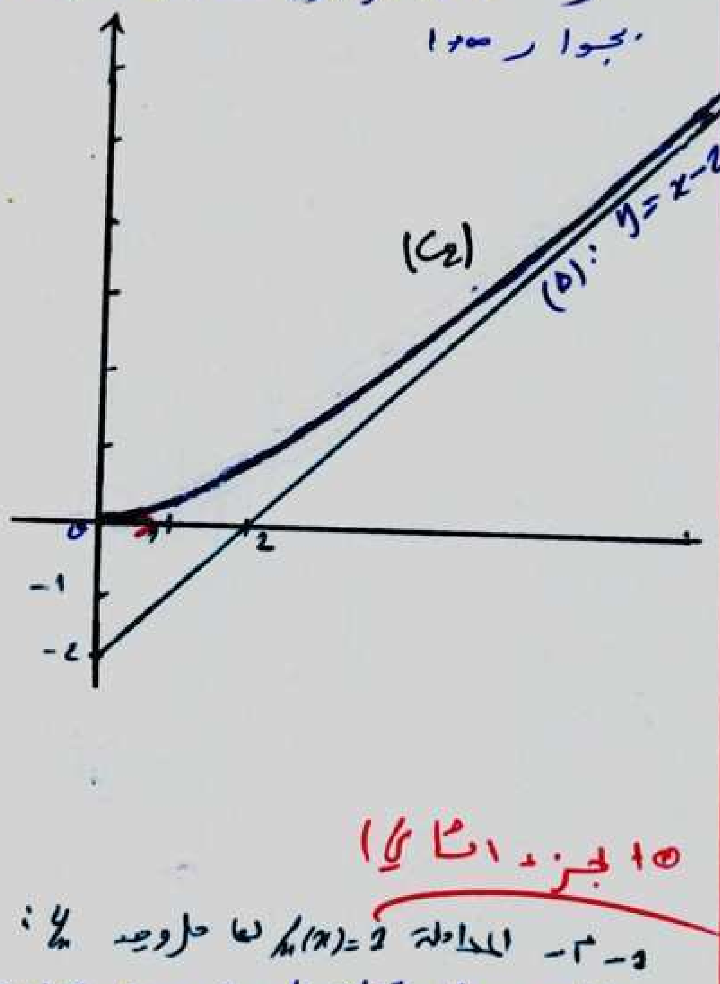
إذن $\left\{ \lim_{+\infty} f_n(x)-x = -n \right\}$

بمعنى أن: $(D): y=x-n$ مقارب مائل لـ C_n بجوار $+\infty$.

ب- منحنى الدالة f_2 :

لدينا $f_2'(x)=e^{-\frac{2}{x}}\left(1+\frac{2}{x}\right)$

و $(D): y=x-2$ مقارب مائل لـ C_n بجوار $+\infty$



الجزء الثاني

1- أ- المعادلة $f_n(x)=1$ لها حل وحيد u_n :

الدالة f_n متصلة على $]0,+\infty[$ وتزايدية قطعا على هذا المجال إذن فهي تقابل من $\mathbb{R}^{+*}$ نحو $\mathbb{R}^{+}$.

وبما أن $1\in\mathbb{R}^{+}$ فإن

$(\exists! u_n \in \mathbb{R}^{+*}) : f_n(u_n)=1$

وهذا هو المطلوب.

ب- نبين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : u_n>1$

لدينا $u_n>1 \Leftrightarrow f_n(u_n)>f_n(1)$

[لأن الدالة f_n تزايدية]

$\Leftrightarrow 1 > e^{-n}$

$\Leftrightarrow e^{n}>1$

وبما أن العبارة الأخيرة صحيحة لكل n من $\mathbb{N}^*$ فإن

$(\forall n\in\mathbb{N}^*) : \boxed{u_n>1}$

2) أ- نبين أن $f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$

لدينا $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} e^{-\frac{n}{u_{n+1}}}$

ومن جهة ثانية لدينا

$f_{n+1}(u_{n+1}) = 1 \Leftrightarrow u_{n+1}e^{-\frac{n+1}{u_{n+1}}}=1$

$\Leftrightarrow u_{n+1} = e^{\frac{n+1}{u_{n+1}}}$

ومنه $f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{n+1}{u_{n+1}}} \times e^{-\frac{n}{u_{n+1}}}$

وعليه فإن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$

ب- استنتاج رتابة المتتالية (u_n) :

لدينا $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : u_n>1$

$\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}}>0$

أي أن $e^{\frac{1}{u_{n+1}}}>1$

ومنه $f_n(u_{n+1})>f_n(u_n)$

وبما أن f_n تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^{+*}$

فإن $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : u_{n+1}>u_n$

و بالتالي فإن (u_n) تزايدية .

3) أ- نبين أن $u_n \ln u_n = n$

لدينا $f_n(u_n) = 1 \Leftrightarrow u_n e^{-\frac{n}{u_n}} = 1$

$\Leftrightarrow u_n = e^{\frac{n}{u_n}}$

$\Leftrightarrow \ln u_n = \frac{n}{u_n}$

إذن $\boxed{u_n \ln u_n = n}$

ب- نبين أن $g(x) = x \ln x$ تقابل من $[1,+\infty[$ نحو مجال يتم تحديده

لدينا $x \mapsto \ln x$ متصلة على $[1,+\infty[$

و $x \mapsto x$ متصلة على $[1,+\infty[$

إذن $x \xrightarrow{g} x \ln x$ متصلة على $[1,+\infty[$

و $g'(x) = \ln x + 1$

بما أن $x \geq 1$

$\ln x \geq 0$

أي: $g'(x) \geq 1 > 0$

وهذا يعني أن g تزايدية قطعا على $[1,+\infty[$.

إذن g تقابل من $[1,+\infty[$ نحو المجال I بحيث

$$I = g([1,+\infty[) = [g(1), \lim_{+\infty} g[= [0,+\infty[$$

• نهاية $(u_n)_n$:

لدينا $g(u_n) = n$

ومنه $u_n = g^{-1}(n)$

وبما أن g تقابل من $[1,+\infty[$ نحو $\mathbb{R}^+$

فإن $\lim_{+\infty} g^{-1}(n) = +\infty$

وكنتيجة لذلك فإن $\left\{\lim_{+\infty} u_n = +\infty\right\}$

4) أ- نبين أن: $\ln u_n + \ln \ln u_n = \ln n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

لدينا حسب السؤال (3) الجزء (أ) منه

$u_n \ln u_n = n$

ومنه: $\ln(u_n \ln u_n) = \ln n$

أي أن $\boxed{\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n}$

وذلك لكل n من $\mathbb{N}^*$.

ب- استنتاج النهاية $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln u_n}{\ln n}$:

لدينا $\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$

$\Leftarrow \frac{\ln u_n}{\ln n} + \frac{\ln(\ln u_n)}{\ln u_n} \times \frac{\ln u_n}{\ln n} = 1$

وعليه: $\frac{\ln u_n}{\ln n}\left(1 + \frac{\ln(\ln u_n)}{\ln u_n}\right) = 1$

أي أن: $\frac{\ln u_n}{\ln n} = \frac{1}{1 + \frac{\ln(\ln u_n)}{\ln u_n}}$

وبما أن $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

فإن $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

وعليه $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln u_n)}{\ln u_n} = 0$

و بالتالي فإن

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln u_n}{\ln n} = 1}$

5) نعتبر $I_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} f(t)\,dt$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ ونضع: $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} I_n$:

أ- نبين أن: $1 \leq \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$:

لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا $u_n \le u_{n+1}$

ولكل t من $[u_n , u_{n+1}]$:

$$u_n \le t \le u_{n+1}$$

و الدالة h تزايدية :

إذن

$$h(u_n) \le h(t) \le h(u_{n+1})$$

أي $1 \le h(t) \le e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$

وعليه $\int_{u_n}^{u_{n+1}} dt \le I_n \le e^{\frac{1}{u_{n+1}}} \int_{u_n}^{u_{n+1}} dt$

$$[t]_{u_n}^{u_{n+1}} \le I_n \le e^{\frac{1}{u_{n+1}}} . [t]_{u_n}^{u_{n+1}}$$

$$u_{n+1}-u_n \le I_n \le (u_{n+1}-u_n)\, e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$$

إذن $\underline{\underline{(n\in\mathbb{N}^*)}}$: $\boxed{1 \le \frac{I_n}{u_{n+1}-u_n} \le e^{\frac{1}{u_{n+1}}}}$

مع العلم أن $u_{n+1}-u_n > 0$.

وبما أن $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

فإن $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n+1}} = 0$

و $x \mapsto e^x$ متصلة في 0.

$\Leftarrow$ $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{u_{n+1}}} = e^0 = 1$

وهذا يعني أن

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{u_{n+1}-u_n} = 1$$

ب- حساب النهاية $\lim_{n\to+\infty} S_n$

لدينا $(n\in\mathbb{N}^*)$: $I_n \ge u_{n+1}-u_n$

ومنه $I_k \ge u_{k+1}-u_k$

إذن $\sum_{1}^{n} I_k \ge \sum_{1}^{n} (u_{k+1}-u_k)$

$$S_n \ge u_{n+1} - u_1$$

وحيث أن $\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1}-u_1) = +\infty$

فإن $\left\{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty\right\}$

الجزء الثالث

لتكن F الدالة بحيث:

حيث x من $\mathbb{R}^+$: $\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} h(t)\,dt \ ; x\neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

1) أ- نبين أن: $0 < e^{-\frac{2}{t}} < 1$ $\underline{\underline{(\forall t\in\mathbb{R}^{+*})}}$

بمعنى أن $e^{-\frac{2}{t}} > 0$ وذلك لكل t من $\mathbb{R}^*$.

و لدينا $e^{-\frac{2}{t}} < 1$

$\Leftrightarrow \frac{-2}{t} < 0$ $[t>0]$

$\Leftrightarrow -2 < 0$

عبارة صحيحة.

ومنه لكل t من $\boxed{0 < e^{-\frac{2}{t}} < 1 \ : \mathbb{R}^{+*}}$

ب- اتصال F وقابلية اشتقاق F على يمين صفر:

لدينا $0 < e^{-\frac{2}{t}} < 1$

ومنه $0 < t\,e^{-\frac{2}{t}} \le 2x$ $\underline{\underline{\forall t\in[x,2x]}}$

إذن $\left(\substack{\text{لأن} \\ x\le 2x}\right)$: $0 < F(x) < 2x\int_x^{2x} dt$

$\underline{\underline{(\forall x>0)}}$: $\{0 < F(x) < 2x^2\}$ $(*)$

وبما أن $\lim_{x\to0^+} 2x^2 = 0$

فإن $\lim_{x\to0^+} F(x) = 0 = F(0)$

يعني F متصلة على اليمين في 0 .

ومن العلاقة (*) نجد أن

$(\forall x>0)$: $0 < \frac{F(x)}{x} < 2x$

وحيث أن $\lim_{0^+} 2x = 0$

فإن $\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x} = 0$

← ومنه فإن F قابلة للاشتقاق على اليمين عند 0 و $F'_d(0)=0$.

2) أ- نبين أن $(\forall t\in\mathbb{R}) : e^t \geq t+1$

لتكن h الدالة بحيث:

$(\forall t\in\mathbb{R}) : h(t) = e^t - t - 1$

h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و:

$h'(t) = e^t - 1$

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أن 0 قيمة دنيا مطلقة للدالة h

ومنه $(\forall t\in\mathbb{R}) : h(t) \geq 0$

أي أن $(\forall t\in\mathbb{R})$: $\boxed{e^t \geq t+1}$

ومنه التعبير.

ب- نبين أن $(\forall x>0) : F(x) \geq -2x + \frac{3}{2}x^2$

لدينا $(\forall t\in\mathbb{R}) : e^t \geq t+1$

ومنه $e^{-\frac{2}{t}} \geq -\frac{2}{t} + 1$

أي: $t e^{-\frac{2}{t}} \geq -2 + t$ [لأن $t>0$]

وبالتالي $(x<2x$ لأن $x>0)$: $F(x) \geq \int_x^{2x} (-2+t)\,dt$

$F(x) \geq \left[-2t + \frac{t^2}{2}\right]_x^{2x}$

بعد الحساب نجد أن

$(\forall x>0)$: $\boxed{F(x) \geq -2x + \frac{3}{2}x^2}$

ولدينا أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2}x^2 - 2x = +\infty$

فإن $\left\{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty\right\}$

ج- دراسة الفرع اللانهائي لـ C_F بجوار $+\infty$

لدينا $\lim_{+\infty} F(x) = +\infty$

ولدينا $(x>0) : F(x) \geq -2x + \frac{3}{2}x^2$

$\Leftarrow \frac{F(x)}{x} \geq -2 + \frac{3}{2}x$

وحيث أن $\lim_{+\infty} \frac{3}{2}x = +\infty$

فإن $\left\{\lim_{+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty\right\}$

نستنتج أن C_F يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب.

3- أ- نبين أن F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$:

لدينا $t \mapsto -\frac{2}{t}$ متصلة على $]0,+\infty[$.

إذن $t \mapsto e^{-\frac{2}{t}}$ متصلة على $]0,+\infty[$

و $t \mapsto t$ متصلة على $]0,+\infty[$

$\Leftarrow t \xrightarrow{k} t e^{-\frac{2}{t}}$ متصلة على $]0,+\infty[$

إذن فهي تقبل دالة أصلية G معرفة على $]0,+\infty[$.

ومنه $F(x) = G(2x) - G(x)$

لدينا $x \xrightarrow{v} 2x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*_+$

و $v(\mathbb{R}^*_+) = \mathbb{R}^*_+$

و $x \mapsto H(x)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$

كما أن $x \mapsto H(2x)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

ومنه فإن الدالة F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

و $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= (2x)'\, G'(2x) - G'(x) \\ &= 2\, h(2x) - h(x) \\ &= 2 \times 2x\, e^{-\frac{1}{x}} - x\, e^{-\frac{2}{x}} \\ &= x\left(4e^{\frac{1}{x}} - 1\right) e^{-\frac{2}{x}} \end{aligned}$$

وبالتالي فإن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ ،

$$\boxed{F'(x) = \left(4e^{1/x} - 1\right) h(x)}$$

ب- تغيرات الدالة F :

لدينا أن $e^{-\frac{2}{x}} > 0$ ، $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$

و لدينا $x>0$ إذن $h(x) > 0$

و لدينا $\frac{1}{x} > 0$

ع $e^{\frac{1}{x}} \geq 1$

$4e^{\frac{1}{x}} - 1 \geq 3 > 0$

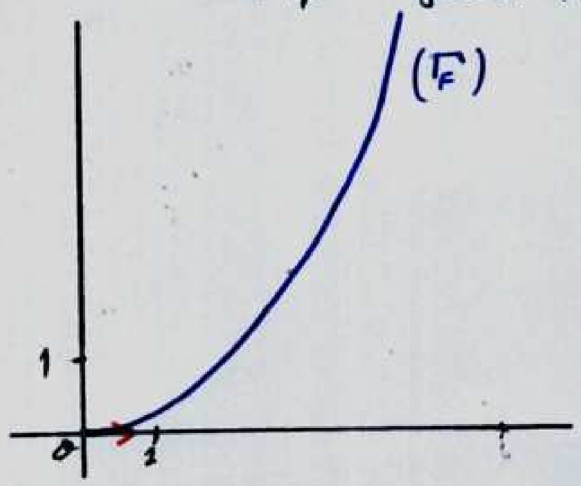
وعليه ، $(4e^{\frac{1}{x}} - 1)h(x) = F'(x) > 0$

إذن F تزايدية قطعاً :

ومنه نحصل على جدول التغيرات التالي :

x	0	$+\infty$
$F(x)$	0 ↗	$+\infty$

4) المنحنى Γ_F :



5) أ- نبين أن :

$$(\forall x>0): \quad x^2 e^{-\frac{2}{x}} \leq F(x) \leq 2x^2 e^{-\frac{1}{x}}$$

لدينا لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ $x < 2x$

و لكل t من $[x, 2x]$:

$$x \leq t \leq 2x$$

و h دالة تزايدية

$$h(x) \leq h(t) \leq h(2x)$$

$$x e^{-\frac{2}{x}} \cdot \int_x^{2x} dt \leq \int_x^{2x} h(t)\,dt \leq 2x e^{-\frac{1}{x}} \cdot \int_x^{2x} dt$$

$$x e^{-\frac{2}{x}} \cdot [t]_x^{2x} \leq F(x) \leq 2x e^{-\frac{1}{x}} \cdot [t]_x^{2x}$$

$$(\forall x>0) \quad \boxed{x^2 e^{-\frac{2}{x}} \leq F(x) \leq 2x^2 e^{-\frac{1}{x}}}$$

ب- نبين أن $(\forall x>0): \; e^x \geq e \cdot x$

حسب السؤال (2) الجزء (أ) منه لدينا

$$(\forall t \in \mathbb{R}): \quad e^t \geq t+1$$

ومنه $e^{x-1} \geq x$

أي أن $e \cdot e^{x-1} \geq e \cdot x$

وعليه $(\forall x>0): \; e^x \geq e \cdot x$

نستنتج أن $F\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) \leq \sqrt{\frac{e}{2}}$

لدينا $F\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) < e\, e^{-\sqrt{\frac{2}{e}}}$

[* حسب السؤال (1-م)] .

وحسب السؤال السابق لدينا

$$e^{\sqrt{\frac{2}{e}}} \geq e\sqrt{\frac{2}{e}} = \sqrt{2e}$$

$$e^{-\sqrt{\frac{2}{e}}} \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

$$F\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) \leq \frac{e}{\sqrt{2e}} = \sqrt{\frac{e}{2}}$$

وهذا هو المطلوب .

6-أ- نبين أن: $(\forall x \geq 4): F(x) \geq x$

لدينا $t \geq x \geq 4$

و h دالة تزايدية ،

ومنه $h(t) \geq h(4) = 1$

أي أن: $F(x) \geq \int_x^{2x} dt$ $\left(\underset{x<2x}{\text{لأن}}\right)$

$$F(x) \geq 2x - x$$

$$(\forall x \geq 4)\ \boxed{F(x) \geq x}$$

ب- نستنتج أن: $\left(\exists \alpha \in \left[\sqrt{\frac{e}{2}}, 4\right]\right): \alpha = \int_\alpha^{2\alpha} h(t)\,dt$

نعتبر الدالة: $\Phi(x) = F(x) - x$

حيث x ضمن $\left[\sqrt{\frac{e}{2}}, 4\right]$.

بما أن F متصلة على $\left[\sqrt{\frac{e}{2}}, 4\right]$

فإن Φ متصلة على $\left[\sqrt{\frac{e}{2}}, 4\right]$

ولدينا $\Phi\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) = F\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) - \sqrt{\frac{e}{2}} < 0$

$\Phi(4) = F(4) - 4 > 0$

إذن: $\Phi\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) \cdot \Phi(4) < 0$

فحسب مبرهنة القيم الوسطية :

$$\left(\exists \alpha \in \left[\sqrt{\frac{e}{2}}, 4\right]\right): \Phi(\alpha) = 0$$

أي أن: $\boxed{\left(\exists \alpha \in \left[\sqrt{\frac{e}{2}}, 4\right]\right): F(\alpha) = \alpha}$

وهذا المطلوب.

انتهى الموضوع

من اقتراح التلميذ
حسني الإدريسي
تحت
إشراف :
ذ- الهاشمي