

$$f: \mathbb{Z}[\alpha] \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$a+b\alpha \longmapsto a^2 + b^2 - ab$$

أ- بين أن $f(z) = |z|^2$: $\forall z \in \mathbb{Z}[\alpha]$,

ب- استنتج أن $f(z) = 0 \iff z = 0$

ج- بين أن f تشاكل من $(\mathbb{Z}[\alpha], +, \times)$ نحو $(\mathbb{Z}, +, \times)$

4- لتكن G المجموعة المكونة من عناصر $\mathbb{Z}[\alpha]$

التي تقبل مقلوبا في الحلقة $(\mathbb{Z}[\alpha], +, \times)$

أ- بين أن $f(G) = \{1\}$

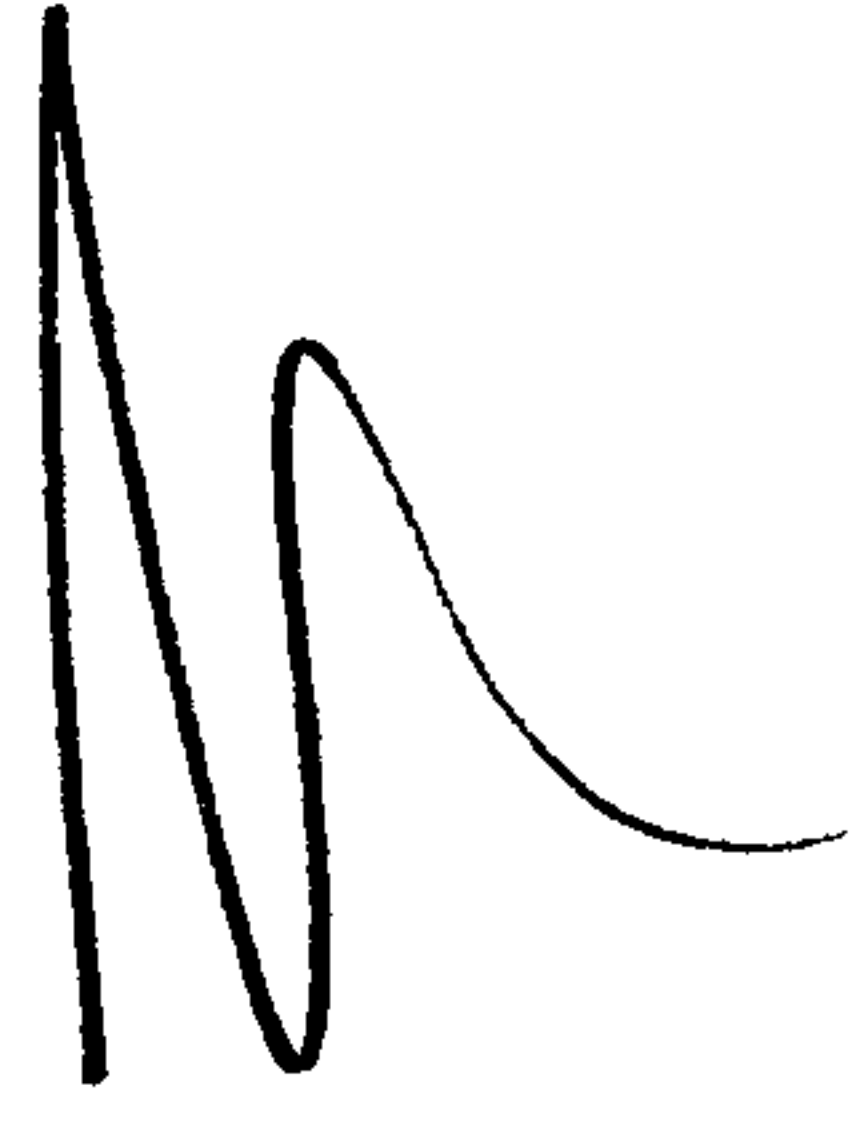
ب- استنتج أن $f(G) = \{1, -1, 1+\alpha, -1-\alpha\}$

ج- بين $(\mathbb{Q}[\alpha], +, \times)$ زمرة تبادلية

د- بين أن $(\mathbb{Q}[\alpha]^*, \times)$ زمرة تبادلية

هـ- استنتج أن $(\mathbb{Q}[\alpha], +, \times)$ جسم تبادلي

Bonne chance



فرض معروف

ثانوية أنيس

25M
2 heure

التصريف الأول :

4p

مجموعة الحدوديات E درجاتها أصغراً وتساوي صفره والتي تحقق $P(x) = 0$

2

1- بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

2

2- حدد أساسا لـ E واستنتج $\dim E$

4p

التصريف الثاني

1- ليكن α عدد عقدي حل للمعادلة: $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

تحقق أن: $\alpha \times \bar{\alpha} = 1$ و $\alpha + \bar{\alpha} = -1$

2- نعتبر المجموعة

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + b\alpha \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

أ- بين أن: $(\mathbb{Z}[\alpha], +)$ زمرة تبادلية

ب- بين أن $(\mathbb{Z}[\alpha], +, \times)$ زمرة مستقر في (\mathbb{Z}, \times)

ج- بين أن $(\mathbb{Z}[\alpha], +, \times)$ حلقة تبادلية

وواحدية.

د- بين أن $[\mathbb{Z}[\alpha]] = \mathbb{Z}$

3- نعتبر التطبيق f المعروف بمايلي :