

الموضوع 1 : (٤ ن)

لكل n من \mathbb{N} نعتبر f_n الدالة المعرفة على $] -1, +\infty[$ بما يلي $f_n(x) = \frac{e^x}{(1+x)^n}$

نرمز بـ (C_n) لمنحنائها في معلم متعامد ممنظم (O, \bar{i}, \bar{j}) حيث $\|\bar{i}\| = 2cm$

الجزء الأول :

- 1- أ- أدرس تغيرات الدوال f_1 و f_2 (نهايات، حساب مشتقة، جدول تغيرات) 1
 ب- أدرس الوضع النسبي ل (C_1) و (C_2) وأنشئهما في نفس المعلم. 1
 2- أحسب مساحة الحيز المحصور بين (C_1) و (C_2) والمستقيمات ذات المعادلة $x=0$ و $x=1$ 1
 3- أ- أثبت أن لكل $n \in \mathbb{N}^*$ f_n تقبل قيمة دنوية u_n عند العدد $n-1$ 1
 ب- أثبت أن $\forall x \geq 0: f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ واستنتج أن $(u_n)_{n \geq 1}$ تناقصية. 1
 ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ 1

الجزء الثاني :

لكل $x > \frac{1}{e}$ نضع $F(x) = \int_0^{\ln x} f_2(t) dt$

- 1- عل وجود $F(x)$ لكل $x > \frac{1}{e}$ 1
 2- أثبت أن $\forall x \in]\frac{1}{e}, 1]: F(x) \leq x \left(1 - \frac{1}{1 + \ln x}\right)$ واستنتج $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^+} F(x)$ 1
 3- أ- أثبت أن $F(x) = \frac{x}{(1 + \ln x)^2} - 1 + 2 \int_0^{\ln x} f_3(t) dt$ 1
 ب- استنتج أن $\forall x \geq 1: F(x) \geq \frac{x}{(1 + \ln x)^2} - 1$ واحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 1
 ج- أثبت أن F تقابل من $]\frac{1}{e}, +\infty[$ نحو \mathbb{R} 0, 1 + 0, 1

الموضوع 2 : (٥ ن)

- 1- ليكن p عددا أوليا حيث $p > 2$
 أ- أثبت أن $\forall k \in \{1, 2, \dots, p-1\}: p \mid C_k^p$ 0, 1
 ب- بين بالترجع أن $\forall n \in \mathbb{N}^*: n^p \equiv n[p]$ 0, 1
 2- نعتبر $a \in \mathbb{N}$ حيث $a \wedge p = 1$ ونضع $A = \{k \in \mathbb{N}^* / a^k \equiv 1[p]\}$
 أ- تحقق أن $(p-1) \in A$ (يمكن استعمال السؤال 1-أ) 1
 نرمز بـ d لأصغر عناصر المجموعة A
 ب- ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ أثبت أنه إذا كان r باقي قسمة n على d فإن $a^n \equiv a^r[p]$ 1
 ج- استنتج أن $\forall n \in A: d \mid n$ 1
 3- نعتبر العدد $u_n = \underbrace{111 \dots 11}_{n \text{ مرة}}$ (كتابة u_n في نظمة العدد العشري)
 أ- تحقق أن $9u_n = 10^n - 1$ 1
 ب- باستعمال السؤال (1) أثبت أن $10^6 \equiv 1[7]$ 1
 ج- أثبت أن $6/n \Leftrightarrow 7/u_n$ 1