العادية 2008

نذكر أن $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

و $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية

و $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي . ونعتبر المجموعة E

$$E=\left\{M\ (a,b)=\begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a\end{pmatrix} / (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

ونضع $J=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{3}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix}$

1) أ- بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء حقيقي

ب- بين أن الأسرة (I,J) أساس للفضاء $(E,+,\cdot)$ و أعط بعده

2) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

3) نعتبر التطبيق f المعرف بما يلي :

$$f\ :\ \mathbb{C}^*\to E^* \qquad z=a+ib\to M(a,b)$$ حيث $E^*=E-\{M\ (0,0)\}$

أ- بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$

ب- استنتج بنية $(E,+,\times)$

4) حل في E المعادلة $J\times X^3=I$

تمرين رقم 1

نعتبر في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ المجموعة E للمصفوفات والتي تكتب على الشكل $M=\begin{pmatrix} a & b\\ -2b & a+2b\end{pmatrix}$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

ونضع $J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$

1) أ- بين أن $(E,+)$ زمرة تبادلية

ب- بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء حقيقي و أعط بعده

2) أحسب J^2 بدلالة $I\ ,\ J$

واستنتج الجداء $M\ (a,b)\times M\ (c,d)$

3) نعتبر التطبيق f المعرف بما يلي :

$$f:\ E\to\mathbb{C}$$
$$M(a,b)\to z=(a+b)+i\,b$$

أ- بين أن f تقابل و عرف تقابله العكسي

ب- بين أن f تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

ج- استنتج بنية $(E,+,\times)$

د- حدد مقلوب M من E

د- حدد في E حلول المعادلة $M^3-4I+2J=\theta$

حيث θ هي المصفوفة المنعدمة في $M_2(\mathbb{R})$

يونيو 2000

(I) لكل x , y من $E=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

نضع : $x*y=x+y-2xy$

1) بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في E

2) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي

3) بين أن $(E,*)$ زمرة تبادلية

4) بين أن : لكل x من E ولكل n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$

$$x*x*x*\ldots*x=\frac{1}{2}\left(1-(1-2x)^n\right)$$

(II) نضع $A(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 1 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix}\quad(\forall x\in E)$

ونعتبر المجموعة $H=\{A(x)/\ x\in E\}$

1) بين أن H جزء مستقر في $(\mathrm{M}_3(\mathbb{R}),\times)$

2) نعتبر التطبيق
$$f:E\to H$$
$$x\to A(x)$$

أ- بين أن f تشاكل تقابلي من $(E,*)$ نحو $(H,\times)$

ب- استنتج بنية $(H,\times)$

ج- ليكن n عدد من $\mathbb{N}^*$ ونضع $B=A\left(-\frac{1}{2}\right)$

بين أن $B^n=A\left(\frac{1-2^n}{2}\right)$ و $(B^n)^{-1}=A\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

تمرين رقم 2

$(\mathrm{F}\ (\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})\ ,+,\cdot)$ هو الفضاء الحقيقي لمجموعة الدوال العددية المعرفة من $\mathbb{R}^{+*}$ نحو $\mathbb{R}$.

لكل $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ولكل x من $\mathbb{R}^{+*}$

نضع $f_{(a,b)}(x)=x^a e^{bx}$ و $\varphi_{(a,b)}(x)=\ln\left(f_{(a,b)}(x)\right)$

ولتكن المجموعة $F=\left\{\varphi_{(a,b)}/\left(a,b\in\mathbb{R}^2\right)\right\}$

1) بين أن $(F,+)$ زمرة جزئية من $(\mathrm{F}\ (\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})\ ,+)$

2) أ- تحقق أن لكل $\varphi_{(a,b)}$ من F و لكل λ من $\mathbb{R}$ لدينا : $\lambda\cdot\varphi_{(a,b)}\in F$

ب- استنتج أن $(F,+,\cdot)$ فضاء حقيقي

ج- بين أن $\left(\varphi_{(0,1)};\varphi_{(1,0)}\right)$ مولدة للفضاء F وحدد بعده