

الموسم الدراسي : 2015/2016

المديرية الإقليمية للتربية و التكوين
تارودانت
الثانوية التأهيلية محمد السادس - تالوين

الأستاذ : معاذ أكرام

المستوى : الثانية باكوريا علوم رياضية - أ

سلسلة تمارين درس الفضاءات المتجهية الحقيقية

التمرين 1

1. ادرس في \mathbb{R}^3 استقلال الأسر التالية :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 &= \{(1, 1, -1), (1, -1, 0)\} & \mathcal{B}_1 &= \{(1, 0, 1), (2, 1, -1), (0, 1, -2)\} \\ \mathcal{B}_4 &= \{(1, 1, 1), (2, -1, 1), (1, 0, 1)\} & \mathcal{B}_3 &= \{(3, -1, 1), (-1, 0, 2), (1, 0, -2)\} \end{aligned}$$

التمرين 2

1. حدد من بين الأسر التالية التي تكون اساس للفضاء المتجهي \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{(1, 1, 1), (3, 0, -1), (-1, 1, -1)\} \\ \mathcal{B}_2 &= \{(1, 1, -1), (1, -1, 0)\} \\ \mathcal{B}_3 &= \{(1, 2, 1), (3, 0, -1), (1, 8, 1)\} \\ \mathcal{B}_4 &= \{(1, 2, -3), (1, 0, -1), (1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

التمرين 3

في الفضاء المتجهي \mathbb{R}^3 نعتبر المجموعات :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 4z = 0\} & E_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\} \\ E_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy - z = 0\} & E_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y = 0 \text{ et } z - x = 0\} \\ E_5 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 4z = 0\} & E_6 &= \{(\alpha, \beta, 2\alpha) / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

1. حدد من بين المجموعات اعلاه التي تمثل فضاءات متجهية جزئية للفضاء المتجهي \mathbb{R}^3 .

التمرين 4

نعتبر المجموعة E المعرفة بما يلي : $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 3z = 0\}$ 1. بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.2. نعتبر في الفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ المتجهتين : $\vec{e}_1 = (0, 3, 1)$ و $\vec{e}_2 = (1, 1, 0)$.1.2 بين أن الأسرة $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ أسرة مولدة للفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$.2.2 بين أن الأسرة $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ حرة في الفضاء $(E, +, \cdot)$.

التمرين 5

نعتبر المجموعة E ومجموعة الدوال العددية f المعرفة على $D - \{1\}$ بما يلي : $f(x) = \frac{P(x)}{x^3 - 1}$ حيث $P(x)$ حدودية درجتها أصغر أو يساوي 2.

1. بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

2. نعتبر الدوال $g_1(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g_2(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$ و $g_3(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$.

1.2. بين أن الأسرة $\mathcal{B} = \{g_1, g_2, g_3\}$

2.2. حدد إحداثيات الدالة $h(x) = \frac{1}{x^3-1}$ بالنسبة للأساس \mathcal{B} .

التمرين 6

لتكن P_4 مجموعة الحدوديات التي درجتها أصغر من أو يساوي 4 بحيث : $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ أساس للفضاء المتجهي $(P_4, +, \cdot)$.

1. بين أن الأسرة $\mathcal{T} = \{(1+x)^4, x(1+x)^3, x^2(1+x)^2, x^3(1+x), x^4\}$ أساس للفضاء المتجهي $(P_4, +, \cdot)$.

2. حدد إحداثيات الحدودية $P(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$ في الأساس \mathcal{T} .

التمرين 7

نعرف في المجموعة $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ قانون التركيب الداخلي $+$ بما يلي : $(x, y) + (x', y') = (xx', y + y')$; $(\forall (x, y), (x', y') \in E)$;
وقانون التركيب الداخلي معاملاته في \mathbb{R} بما يلي : $\alpha(x, y) = (x^\alpha, \alpha y)$; $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) ; (\forall (x, y) \in E)$:

1. نعتبر التطبيق : $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow E$

$(x, y) \mapsto (e^x, y)$

نذكر $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

1.1. بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^2, +)$ نحو $(E, +)$.

1.2. استنتج أن $(E, +)$ زمرة تبادلية.

1.3. حدد العنصر المحايد في $(E, +)$ ، وما هو مماثل (x, y) في $(E, +)$.

2. بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

التمرين 8

نعتبر المجموعة التالية : $E = \{f : x \mapsto (ax + b)e^{2x} / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

1. بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

2. لتكن f_1 و f_2 الدالتين العدديتين المعرفتين على \mathbb{R} بما يلي : $f_1(x) = xe^{2x}$ و $f_2(x) = e^{2x}$.

2.1. بين أن الأسرة $\mathcal{B} = \{f_1, f_2\}$ أساس للفضاء المتجهي E .

2.2. بين أن الدالة $g(x) = \int_0^x (t + \frac{1}{2})e^{2t} dt$ تنتمي الى المجموعة E ، محدداً زوج احداثياتها بالنسبة للأساس \mathcal{B} .