دالة لوغاريتم

التمرين الأول

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left[0,+\infty\right[$ بما يلي : $x \neq 0 \quad ; \quad f\left(x\right) = x\left(\ln x\right)^2 - \left(x-1\right)^2$ و $f\left(0\right) = -1$

1) أ) بين أن f متصلة على $\left[0,+\infty\right[$

ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين النقطة 0

2) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f\left(x\right)}{x}$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين

3) أ) بين أن $\left(\forall x > 0\right) \quad \ln x \leq x - 1$

ب) أحسب $f'\left(x\right)$ و $f''\left(x\right)$ و تحقق أن $f'\left(1\right) = 0$

ج) استنتج إشارة $f'\left(x\right)$ و ضع جدول تغيرات الدالة f

4) أرسم منحنى الدالة f

التمرين الثاني

الجزء (1) لتكن g دالة بحيث $g\left(x\right) = x - (1+x)\ln(1+x)$

1) حدد مجموعة تعريف g و أحسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x) \;;\; \lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)$

2) أحسب $g'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة g

3) استنتج إشارة $g\left(x\right)$ (لاحظ أن $g(0) = 0$)

الجزء (2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\left]-1,+\infty\right[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f\left(x\right) = \dfrac{x}{\ln(1+x)} & x \neq 0 \quad ; \quad x \neq -1 \\ f\left(0\right) = 1 & ; \quad f\left(-1\right) = 0 \end{cases}$$

1) أ- بين أن f متصلة في النقطة 0

ب- بين أن f متصلة على يمين النقطة -1

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين النقطة -1

3) أ) بين أن $\left(\forall x \geq 0\right) \quad x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln\left(1+x\right) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ و أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0

ب) ليكن x من $\left]-1,0\right[$

نعتبر الدالة φ المعرفة على $\left]-1,0\right[$ بما يلي : $\varphi\left(t\right) = t^2\left(x - \ln\left(1+x\right)\right) - x^2\left(t - \ln\left(1+t\right)\right)$

بين أن $\dfrac{x - \ln\left(1+x\right)}{x^2} = \dfrac{1}{2\left(1+c\right)} \quad \left(\exists c \in \left]x,0\right[\right)$ و أدرس قابلية اشتقاق f على يسار 0

3) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right) = +\infty$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$

4) أ- بين أن $\left(\forall x \in \left]-1,+\infty\right[- \left\{0\right\}\right) \quad ; \quad f'(x) = \dfrac{-g(x)}{(1+x)\left(\ln(1+x)\right)^2}$

ب- أنجز جدول تغيرات الدالة f

5) أدرس الوضع النسبي للمنحنى $\left(C_f\right)$ و المستقيم $(\Delta) \;\; y = x$ ثم أرسم المنحنى $\left(C_f\right)$

التمرين الثالث

ليكن n عددا من $\mathbb{N}^*$. نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة بما يلي : $f_n\left(x\right) = nx + \ln x$

1) أ) احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n\left(x\right)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f_n\left(x\right)$

ب) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى $\left(C_n\right)$ عند $+\infty$

2) أدرس منحى تغيرات الدالة f_n و ارسم المنحنى $\left(C_1\right)$

3) أ) بين أن المعادلة $f_n\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا u_n و بين ان $u_n<1$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$

ب) بين أن $f_n\left(u_{n+1}\right)=-u_{n+1}$ و استنتج رتابة المتتالية $\left(u_n\right)_n$

4) أ) بين أن $x>\ln x$ $\left(\forall x>0\right)$ و استنتج أن $u_n<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$

ب) حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}nu_n$ و بين ان $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{nu_n}{\ln n}=1$

التمرين الرابع

الجزء (1)

نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=-\dfrac{1}{x+1}+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}g(x)$

2) بين أن $g'(x)=\dfrac{-1}{x(x+1)^2}$ و ضع جدول تغيرات الدالة g

3) استنتج أن $g(x)>0$ $(\forall x>0)$

الجزء (2)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $x\neq0$; $f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ و $f(0)=0$

1) أ- بين أن الدالة f متصلة على يمين 0

ب- بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=+\infty$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$

3) أحسب المشتقة $f'(x)$ و أدرس تغيرات الدالة f ثم أنجز جدول تغيراتها

4) أرسم المنحنى $\left(C_f\right)$

الجزء (3)

نعتبرالمتتالية $\left(U_n\right)_{n>0}$ المعرفة بما يلي : $U_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ و نضع $V_n=\ln U_n$

1) أ- تحقق أن $V_n=f(n)$ و استنتج أن $\left(U_n\right)_n$ تزايدية

ب- بين أن $\ln\left(1+x\right)<x$ $\left(\forall x>0\right)$ و استنتج أن $U_n<e$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ ثم احسب نهاية المتتالية $\left(U_n\right)_{n>0}$

2) نضع $S_n=\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{V_k}{k}$ أحسب S_n بدلالة n ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{\ln n}$

التمرين الخامس

لتكن f دالة عددية معرفة على $\left[0,\dfrac{1}{e}\right[\cup\left]\dfrac{1}{e},\infty\right[$ بما يلي : $x\neq0$; $f\left(x\right)=\dfrac{x}{1+\ln x}$ و $f\ (0)=0$

و ليكن $\left(C_f\right)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) أ- بين أن f متصلة على يمين $x_0=0$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_0=0$

2) أحسب النهايتين $\lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ x < \frac{1}{e}}} f(x)$ و $\lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ x > \frac{1}{e}}} f(x)$

3) أ- أحسب النهاية $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

4) بين أن $f'(x) = \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

5) أرسم المنحنى (C_f)

6) ليكن n عدد طبيعي بحيث $n \geq 2$

أ) بين أن المعادلة $f(x) = \sqrt{n}$ تقبل بالضبط حلين u_n و v_n بحيث $e^{-1} < u_n < 1 < v_n$

ب) (1) بين أن $v_n \geq \sqrt{n}$ $(\forall n \geq 2)$ ثم حدد $\lim_{n \to +\infty} v_n$

(2) بين أن $\sqrt{x} > 1 + \ln x$ $(\forall x \geq 16)$ و استنتج أن $v_n \leq n$ $(\forall n \geq 16)$

(3) بين أن $\ln v_n = \frac{1}{2}\ln n + \ln(1+\ln v_n)$ $(\forall n \geq 2)$ و استنتج أن $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln v_n}{\ln n} = \frac{1}{2}$

ج) (1) بين أن $(u_n)_n$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة

(2) بين أن $u_n = e^{\frac{u_n}{\sqrt{n}}-1}$ $(\forall n \geq 2)$ و استنتج أن $\lim_{n \to +\infty} u_n = e^{-1}$ ثم بين أن $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\left(u_n - e^{-1}\right) = e^{-2}$

التمرين السادس

ليكن n عددا من $\mathbb{N}^*$. نعتبر الدالة f_n المعرفة بما يلي : $f_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ln x$

1) أحسب النهايتين $\lim_{x \to +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_n(x)$

2) أحسب المشتقة $f_n'(x)$ و أنجز جدول تغيرات الدالة f_n

3) أ) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا u_n ثم بين أن $1 \leq u_n < e^2$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ب) بين أن $f_n(u_{n+1}) = 1 - \frac{1}{2}\ln u_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ و أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_n$

ج) بين أن $\ln u_n = 2 - \frac{2}{n}u_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

د) أحسب $\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n}u_n$ و استنتج ان $\lim_{n \to +\infty} u_n = e^2$

4) أ) بين أن $e^{\frac{2}{n}u_n} - 1 = \frac{2e^d}{n}u_n$ $(\exists d > 0)$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ب) استنتج أن $1 \leq \frac{e^{\frac{2}{n}u_n} - 1}{\frac{2}{n}u_n} \leq e^{\frac{2e^2}{n}}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ثم حدد $\lim_{n \to +\infty} n\left(e^2 - u_n\right)$