الدالة الأسية النبيرية

التمرين الأول

أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln\left(e^x-1\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x^2}}-e^{\frac{2}{x}}\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-2x^2-3\ln x$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln\left(e^{2x}-1\right)$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x\ln x}}{x+1}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{e^x-1}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{\sqrt{e+1}}-e^{\sqrt{x}}\right)$	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{\ln\left(e^x-1\right)}{x}$

التمرين الثاني

ليكن m عددا حقيقيا موجبا قطعا . ونعتبر الدالة f_m المعرفة بما يلي : $f_m(x)=\dfrac{e^x-me^{-x}}{e^x+me^{-x}}$

1) ما هي D مجموعة تعريف الدالة f_m
2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_m) للدالة f_m
3) أدرس تغيرات الدالة f_m
4) بين أن (C_m) يقبل نقطة انعطاف يتم تحديدها
5) أرسم المنحنى (C_1)
6) بين أن f_m يقبل دالة عكسية و عرفها

التمرين الثالث

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $x>0$; $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ و $f(0)=1$

1) أ- أدرس اتصال الدالة f على $[0,+\infty[$

ب- بين أن f قابلة لاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و أحسب المشتقة $f'(x)$

2) ليكن a من المجال $]0,+\infty[$ و نضع $h(x)=\dfrac{e^a-1-a}{a^2}x^2-e^x+1+x$

أ- بين أن $\dfrac{e^a-1-a}{a^2}=\dfrac{e^c-1}{2c}$ $\left(\exists c\in\,]0,a[\right)$

ب- استنتج أن f قابلة للاشتقاق على يمين $x_0=0$ و حدد $f_d'(0)$

3) أرسم منحنى الدالة f

التمرين الرابع

ليكن n عددا طبيعيا من $\mathbb{N}^*$ و نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=x^n\left(e^x-1\right)$

1) أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}$
2) أحسب المشتقة و ضع جدول تغيرات الدالة f_n
3) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1})
4) أرسم المنحنيين (C_1) , (C_2)
5) أ- بين أن المعادلة $f_n(x)=1$ تقبل حلا وحيدا a_n و أن $\ln 2<a_n<1$

ب- ادرس رتابة المتتالية $(a_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة ثم بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=1$

التمرين الخامس

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=(x+1)e^{-\frac{x}{2}}$

1) أ- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ب- أدرس منحى تغيرات الدالة f و ضع جدول تغيراتها

2) أدرس تقعر المنحنى (C_f) و أرسمه

3) بين أن $(\forall x\in[0,+\infty[)\ \ |f'(x)|\leq\frac{1}{2}$

4) بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α و أن $1<\alpha<2$

5) لتكن $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة بما يي : $U_0=0$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ 0\leq U_n<2$

ب- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ |U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|U_n-\alpha|$

ج- بين أن $(U_n)_n$ متقاربة و أن $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\alpha$

التمرين السادس

(I) لتكن f و g الدالتين المعرفتين بما يلي : $f(x)=4xe^{-x\ln 2}-2$ و $g(x)=\frac{\ln(2x)}{x}$

1) أ- أحسب نهايتي f عند $+\infty$; $-\infty$

ب- حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f)

2) أ- بين أن $(\forall x\in\mathbb{R})\ f'(x)=4(1-x\ln 2)e^{-x\ln 2}$

ب- أنجز جدول تغيرات الدالة f

3) أدرس الدالة g (النهايات , الفرع اللانهائي , التغيرات)

4) أرسم المنحنيين (C_f) و (Γ_g) في نفس المعلم (نأخذ $\ln 2\simeq 0,7$; $e\simeq 2,7$; $\frac{1}{\ln 2}\simeq 1,4$; $e^{-1}\simeq 0,4$)

(II) ليكن k عددا حقيقيا بحيث $0<\mathrm{k}<\frac{2}{e}$

1) أ- تحقق أن المعادلة $g(x)=k$ تقبل حلين مختلفين α ; β بحيث $\frac{1}{2}<\alpha<\beta$

ب- حدد قيمة العدد k بحيث يكون العددين α ; β هما حلا المعادلة $f_k(x)=0$ حيث

$f_k(x)=4xe^{-kx}-2$

2) أ- تأكد أن $(\forall x\in\mathbb{R})\ f_k'(x)=4(1-kx)e^{-kx}$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f_k

3) أ- استنتج أن المعادلة $f_k(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين a ; b بحيث : $a<\frac{1}{\mathrm{k}}<b$

التمرين السابع

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f

2) أ- بين أن $f\left(\frac{1}{x}\right)f(x) = 1$: $(\forall x \in D-\{0\})$

ب- استنتت العلاقة التي تربط $f'\left(\frac{1}{x}\right)$ و $f'(x)$

ج- بين أنه إذا كان α جذر المعادلة $f'(x) = 0$ فإن العدد $\frac{1}{\alpha}$ جذر المعادلة $f'\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

3) أ- بين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{\left(x^2-1\right)^2}e^{\frac{2x}{x^2-1}}$ $(\forall x \in D)$ حيث $g(x)$ دالة حدودية يتم تحديدها

ب- تحقق أن $\forall x \neq 0 \ : \ x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = x^2\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x+\frac{1}{x}\right) - 4\right]$

ج- أدرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

4) لتكن h الدالة المعرفة كما يلي : $\begin{cases} h(x) = f(x) & x \in D \\ h(1) = h(-1) = 0 \end{cases}$

أ- بين أن h متصلة على يسار 1 و على يسار -1

ب- بين أن $\forall x \in D \ : \ \frac{h(x)}{x-1} = \frac{x+1}{2}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)e^{\frac{2x}{x^2-1}}$

ج- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \frac{h(x)}{x-1}$ ماذا تستنتج ؟

د- هل f قابلة للاشتقاق على يسار -1

5) أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$; $-\infty$

6) أرسم منحنى الدالة h

التمرين الثامن

الجزء(1) : نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x) = \frac{2-x}{x-1} + \ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$

1) أدرس تغيرات الدالة g على المجال $]1,+\infty[$

2) أ- بين أن : $g(c) = 0$ $\left(\exists! c \in \left]\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right[\right)$

ب- استنتج إشارة $g(x)$

الجزء (2) : لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=e^{\frac{x-1}{x^2}}-1 & ; \quad x\in]-\infty,0[\cup]0,1] \\ f(0)=-1 \\ f(x)=e^{x\ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right)} & ; \quad x\in]1,+\infty[\end{cases}$$

1) أحسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$ و استنتج الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f)

2) بين أن f متصلة في كل من النقطتين $x_0=0$ و $x_1=1$

3) أ- تحقق أن $\frac{f(x)}{x-1}=e^{(x-1)\ln(x-1)-2x\ln x}$ $(\forall x\in]1,+\infty[)$ و أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_1=1$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يسار $x_1=1$

ج- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين و على يسار النقطة $x_0=0$

4) بين أن $\begin{cases} f'(\;)=\frac{2-x}{x^3}e^{\frac{x-1}{x^2}} & ; \; x\in]-\infty,0[\cup]0,1[\\ f'(x)=g(x)f(x) & ; \; x\in]1,+\infty[\end{cases}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

5) أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $e^{\frac{1}{4}}=1,3$ و $c=1,4$ و $f(c)=0,13$)

التمرين التاسع

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f(x)=\frac{e^{-x}}{x}$

1) أحسب نهايات f عند محدات مجموعة تعريفها

2) أدرس تغيرات الدالة f

3) أ- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

ب- أرسم المنحنى (C_f)

(II) لتكن $(U_n)_n$ المتتالية المعرفة بما يلي : $U_0=1$ و $U_{n+1}=U_n^2 f(U_n)=U_n e^{-U_n}$

1) بين أن $(\forall x>0) \; : \; e^x\geq x+1$

2) استنتج أن $(\forall x>0) \quad x^2 f(x)\leq \frac{x}{x+1}$

3) أ- باستعمال برهان بالترجع بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}) \quad 0<\mathrm{U_n}<\frac{1}{n+1}$

ب- بين أن $(U_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها

4) نضع $V_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}U_k$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

أ- بين أن $V_n=\ln\left(\frac{1}{U_n}\right)$

ب- حدد نهاية المتتالية $(V_n)_n$