الدوال الأسية

تمرين رقم 1

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\ln\left(e^{x}-e^{-x}\right)$

1) أ- أحسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المقارب المائل

2) أدرس منحى تغيرات الدالة f ثم أنجز جدول تغيراتها

3) ليكن n عدد من $\mathbb{N}$. نعتبر المعادلة $f(x)=n$ (E_n)

أ- بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا x_n

ب- أدرس رتابة المتتالية $(x_n)_n$

ج- قارن x_n و n ثم استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n-n$

4) أ- بين أن f تقابل من $]0,+\infty[$ نحو مجال يتم تحديده و عرف الدالة العكسية f^{-1}

ب- حل المعادلة $e^{2x}-e^{x+y}-1=0$ حيث x هو المجهول

ج- استنتج أن $x_n=\ln\left(\frac{1}{2}e^{n}+\frac{1}{2}\sqrt{e^{2n}+n}\right)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ و حدد مرة ثانية $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n-n$

تمرين رقم 2

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة عبى $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=x-e^{-x}$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) أدرس منحى تغيرات الدالة f و استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α و أن $\alpha\in\left]\frac{1}{2},1\right[$

3) استنتج إشارة $f(x)$

II) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=\dfrac{x+1}{e^{x}+1}$

1) أ- أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

ب- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

2) أ- بين أن $g'(x)=\dfrac{-e^{x}f(x)}{(e^{x}+1)^{2}}$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة g

3) بين أن المعادلة $f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=x$

4) ارسم المنحنى (C_g) (نأخذ $\alpha\simeq 0,57$)

III) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0=0$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

1) بين أن $0\le U_n\le\alpha$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

2) بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية و استنتج أنها متقاربة

3) حدد نهاية المتتالية $(U_n)_n$

تمرين رقم 3

ليكن k عددا حقيقيا بحيث $0 < k < e$

(A) نعتبر الدالة f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_k(x) = (2-x)e^x - k$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)$

2) أحسب المشتقة $f_k'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f_k . أحسب $f_k(1)$

3) أ- بين أن المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين β_k ; α_k و أن $\alpha_k < 1 < \beta_k$

ب- بين أن $e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$ حدد العلاقة التي تحققها β_k

4) حدد إشارة $f_k(x)$

(B) نعتبر الدالة g_k المعرفة كما يلي : $g_k(x) = \dfrac{e^x - k}{e^x - kx}$ و (C_k) منحنى الدالة g_k

1) أ- أدرس منحنى تغيرات الدالة $u(x) = e^x - kx$

ب- استنتج أن $e^x - kx > 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ (نذكر $0 < k < e$)

2) أ- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} g_k(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g_k(x)$

ب- بين أن $g_k'(x) = \dfrac{kf_k(x)}{(e^x - kx)^2}$

ج- أحسب $g_k(1)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة g_k

3) لتكن M_k و N_k نقطتي المنحنى (C_k) و التين أفصولهما α_k و β_k على التوالي

أ- بين أن $g(\alpha_k) = \dfrac{1}{\alpha_k - 1}$ و حدد $g_k(\beta_k)$

ب- بين مما سبق أن M_k و N_k تنتميان لمنحنى ثابت يتم تحديد معادلة له

ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) ; (C_2)

4) أ- بين أن $\alpha_2 = 0$

ب- أرسم المنحنيين (C_1) ; (C_2) في نفس المعلم (نأخذ $\beta_2 = 1{,}6$; $\beta_1 = 1{,}8$; $\alpha_1 = -1{,}1$)

تمرين رقم 4

الجزء (1) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $x \neq 0$; $g(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x}$ و $g(0) = 1$

1) بين أن g متصلة في النقطة $x_0 = 0$

2) نضع $h(t) = 1 + \dfrac{t^2}{2} - t - e^{-t}$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$

أ- بين أن $0 \leq h''(t) \leq t$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$

ب- استنتج أن : $x - \dfrac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$

3) بين أن g قابلة للاشتقاق على يمين $x_0 = 0$

4) أدرس منحى تغيرات الدالة g

الجزء (2) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $x > 0$; $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}(1 - e^{-x})$ و $f(0) = 1$

1) أ- أدرس اتصال الدالة f على يمين $x_0 = 0$

ب- بين أن f قابلة للاشتقاق على يمين $x_0 = 0$ و أن $f_d'(0) = -\dfrac{3}{2}$ (لاحظ أن $f(x) = 2g(2x) - g(x)$)

2) أـ بين أن $f'(x)=\dfrac{2x+1-(x+1)e^{x}}{x^{2}e^{2x}} \quad (\forall x\in\mathbb{R}^{+*})$

بـ بين أن $e^{x}\geq x+1 \quad (\forall x\in\mathbb{R}^{+})$ و استنتج أن f تناقصية على $\mathbb{R}^{+}$ ثم أنجز جدول التغيرات

3) أرسم المنحنى (C_f)

الجزء 3) لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^{+}$ بما يلي : $F(x)=\displaystyle\int_{x}^{2x}f(t)\,dt$

1) بين أن $xf(2x)\leq F(x)\leq xf(x) \quad (\forall x\in\mathbb{R}^{+*})$ وأحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

2) بين أن F قابلة للاشتقاق في 0 و أعط معادلة المماس لمنحنى الدالة F في النقطة ذات الأفصول 0

3) أـ بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+}$ أحسب $F'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^{+}$

بـ أدرس رتابة الدالة F

تمرين رقم 5

ليكن n عددا طبيعيا بحيث $n\geq 2$. نضع $g_n(x)=n(1-e^{-x})-x$ و نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $x\neq 0 \;;\; f_n(x)=\dfrac{x^{n}}{e^{x}-1}$ و $f_n(0)=0$

(I) 1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}g_n(x) \;;\; \lim\limits_{x\to-\infty}g_n(x)$

2) أحسب المشتقة $g_n'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g_n

3) أـ بين أن $x-1\geq \ln x \quad (\forall x\in\,]0,+\infty[)$ و استنتج اشارة $g_n(\ln n)$

بـ بين أن المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل حلين أحدهما $a=0$ و الثاني β_n موجب قطعا . أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n$

جـ استنتج إشارة $g_n(x)$

(II) 1) أـ أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty}f_n(x)$ (ناقش حسب زوجية العدد n)

بـ أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) عند $-\infty$

جـ أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) عند $+\infty$

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f_n في النقطة $x_0=0$

3) أـ بين أن $f_n'(x)=\dfrac{x^{n-1}e^{x}g_n(x)}{(e^{x}-1)^{2}} \quad (\forall x\in\mathbb{R}^{*})$

بـ أنجز جدول تغيرات كل من الدالتين $f_2 \;;\; f_3$

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(C_2) \;;\; (C_3)$

5) أرسم المنحنيين $(C_2) \;;\; (C_3)$ (نأخذ $\beta_2\simeq 1{,}52 \;;\; f_2(\beta_2)\simeq 0{,}65$ و $\beta_3\simeq 2{,}82 \;;\; f_3(\beta_3)\simeq 1{,}42$)

(III) لتكن F_n قصور الدالة f_n على المجال $I=[0,1]$

1) بين أن F_n تفابل من I نحو مجال J يتم تحديده

2) بين أن المعادلة $F_n(x)=\dfrac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا نرمز له بالرمز U_n

3) تحقق أن $F_{n+1}(U_n)=\dfrac{1}{2}U_n$ و استنتج ان المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

4) أـ بين أن $U_2>\dfrac{1}{2}$ و بين أن $2U_n^{n}\geq\dfrac{1}{2}$ (نأخذ $\sqrt{e}\geq\dfrac{3}{2}$)

بـ بين أن $-\dfrac{2\ln 2}{n}\leq \ln U_n$ و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln U_n)$ و استنتج نهاية المتتالية $(U_n)_n$