

سلسلة 3	الأعداد العقدية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية
	$\begin{cases} A = 1 + \cos\left(\frac{f}{5}\right) + \cos\left(\frac{2f}{5}\right) + \cos\left(\frac{3f}{5}\right) + \cos\left(\frac{4f}{5}\right) \\ B = \sin\left(\frac{f}{5}\right) + \sin\left(\frac{2f}{5}\right) + \sin\left(\frac{3f}{5}\right) + \sin\left(\frac{4f}{5}\right) \end{cases}$	<b>تمرين 1 :</b> $w = \cos\left(\frac{f}{5}\right) + i \sin\left(\frac{f}{5}\right)$
	$A = 1 + \cos\left(\frac{f}{5}\right) + \cos\left(\frac{2f}{5}\right) + \cos\left(\frac{3f}{5}\right) + \cos\left(\frac{4f}{5}\right)$ $A = 1 + \cos\left(\frac{f}{5}\right) + \cos\left(\frac{2f}{5}\right) + \cos\left(f - \frac{2f}{5}\right) + \cos\left(f - \frac{f}{5}\right)$ $A = 1 + \cos\left(\frac{f}{5}\right) + \cos\left(\frac{2f}{5}\right) - \cos\left(\frac{f}{5}\right) - \cos\left(\frac{2f}{5}\right)$ $A = 1$	1
	$A + iB = 1 + \left[ \cos\left(\frac{f}{5}\right) + i \sin\left(\frac{f}{5}\right) \right] + \left[ \cos\left(\frac{2f}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2f}{5}\right) \right] + \left[ \cos\left(\frac{3f}{5}\right) + i \sin\left(\frac{3f}{5}\right) \right] + \left[ \cos\left(\frac{4f}{5}\right) + i \sin\left(\frac{4f}{5}\right) \right]$ $A + iB = 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = \frac{1 - w^5}{1 - w}$ $iB = \frac{2}{1 - w} - A = \frac{2}{1 - w} - 1 = \frac{1 + w}{1 - w} : \text{منه } A + iB = \frac{2}{1 - w} : \text{فإن } w^5 = \cos(f) + i \sin(f) = -1$	2
	$1 - w = 1 - \cos\left(\frac{f}{5}\right) - i \sin\left(\frac{f}{5}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{f}{10}\right) - 2 \sin\left(\frac{f}{10}\right) \cos\left(\frac{f}{10}\right) i = 2 \sin\left(\frac{f}{10}\right) \left( \sin\left(\frac{f}{10}\right) - \cos\left(\frac{f}{10}\right) i \right)$ $1 - w = 2 \sin\left(\frac{f}{10}\right) \left( \cos\left(\frac{f}{2} - \frac{f}{10}\right) - \sin\left(\frac{f}{2} - \frac{f}{10}\right) i \right) = 2 \sin\left(\frac{f}{10}\right) \left( \cos\left(\frac{2f}{5}\right) - \sin\left(\frac{2f}{5}\right) i \right)$ $1 - w = \left[ 2 \sin\left(\frac{f}{10}\right); \frac{-2f}{5} \right]$ $1 + w = 1 + \cos\left(\frac{f}{5}\right) + i \sin\left(\frac{f}{5}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{f}{10}\right) + 2 \sin\left(\frac{f}{10}\right) \cos\left(\frac{f}{10}\right) i = 2 \cos\left(\frac{f}{10}\right) \left( \cos\left(\frac{f}{10}\right) + \sin\left(\frac{f}{10}\right) i \right)$ $1 + w = \left[ 2 \cos\left(\frac{f}{10}\right); \frac{f}{10} \right]$	3
	$iB = \frac{\left[ 2 \cos\left(\frac{f}{10}\right); \frac{f}{10} \right]}{\left[ 2 \sin\left(\frac{f}{10}\right); \frac{-2f}{5} \right]} = \frac{\left[ 2 \cos\left(\frac{f}{10}\right); \frac{f}{10} + \frac{2f}{5} \right]}{\left[ 2 \sin\left(\frac{f}{10}\right) \right]} = \left[ \cotan\left(\frac{f}{10}\right); \frac{f}{2} \right] = i \cotan\left(\frac{f}{10}\right)$ $B = \cotan\left(\frac{f}{10}\right) : \text{بالتالي}$	4
<p>للتذكير، <math>\cotan(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}</math> (ليس من الضروري استعماله، لكنه يجعل الصيغة أكثر بساطة)</p>		

$$C = \frac{B}{2} = \frac{\cotan\left(\frac{f}{10}\right)}{2} : \text{بالتالي}$$

$$B = \sin\left(\frac{f}{5}\right) + \sin\left(\frac{2f}{5}\right) + \sin\left(\frac{3f}{5}\right) + \sin\left(\frac{4f}{5}\right)$$

$$B = \cos\left(\frac{f}{5}\right) + \sin\left(\frac{2f}{5}\right) + \sin\left(f - \frac{2f}{5}\right) + \sin\left(f - \frac{f}{5}\right) : \text{لدينا } 5$$

$$B = \sin\left(\frac{f}{5}\right) + \sin\left(\frac{2f}{5}\right) + \sin\left(\frac{f}{5}\right) + \sin\left(\frac{2f}{5}\right)$$

$$B = 2C$$

$$w = \cos\left(\frac{f}{5}\right) + i \sin\left(\frac{f}{5}\right) : \text{تمرين 2}$$

$$w^2 + \frac{1}{w^2} - \left(w + \frac{1}{w}\right) + 1 = \frac{w^4 + 1 - w^3 - w + w^2}{w^2} = \frac{1 + (-w) + (-w)^2 + (-w)^3 + (-w)^4}{w^2} : \text{لدينا}$$

$$w^2 + \frac{1}{w^2} - \left(w + \frac{1}{w}\right) + 1 = \frac{1}{w^2} \times \frac{1 - (-w)^5}{1 - (-w)} = \frac{1}{w^2} \times \frac{1 + w^5}{1 + w}$$

$$w^2 + \frac{1}{w^2} - \left(w + \frac{1}{w}\right) + 1 = 0 : \text{فإن } w^5 = \cos(f) + i \sin(f) = -1 \text{ وبما أن } 1$$

$$\text{لدينا } z = w + \frac{1}{w} \text{ منه:}$$

$$z^2 - z - 1 = \left(w + \frac{1}{w}\right)^2 - \left(w + \frac{1}{w}\right) - 1 = w^2 + 2 + \frac{1}{w^2} - \left(w + \frac{1}{w}\right) - 1 = w^2 + \frac{1}{w^2} - \left(w + \frac{1}{w}\right) + 1 = 0 \quad \text{أ)}$$

$$z = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ أو } z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} : \text{منه } \Delta = 1 + 4 = 5, z^2 - z - 1 = 0 : \text{هو حل للمعادلة: } 2$$

$$w + \frac{1}{w} = w + w^{-1} = \cos\left(\frac{f}{5}\right) + i \sin\left(\frac{f}{5}\right) + \cos\left(\frac{-f}{5}\right) + i \sin\left(\frac{-f}{5}\right) = 2 \cos\left(\frac{f}{5}\right) : \text{لدينا (ب)}$$

$$2 \cos\left(\frac{f}{5}\right) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ أو نستنتج أن:}$$

$$\cos\left(\frac{f}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} : \text{بالتالي } 2 \cos\left(\frac{f}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} : \text{فإن } (0 < \frac{f}{5} < \frac{f}{2} \text{ لأن } \cos\left(\frac{f}{5}\right) > 0 \text{ وبما أن } 3$$

$$\sin\left(\frac{f}{5}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{f}{5}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16 - 1 - 2\sqrt{5} - 5}{16}} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{2(5 - \sqrt{5})}}{4} : \text{منه}$$

$$\tan\left(\frac{f}{5}\right) = \frac{\sin\left(\frac{f}{5}\right)}{\cos\left(\frac{f}{5}\right)} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} : \text{ومننه}$$

$$\sin\left(\frac{f}{5}\right) > 0 : \text{لأن } \sin\left(\frac{f}{5}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{f}{5}\right)}$$

تجاوزت بعض حسابات الجذور المربعة

**تمرين 3:** المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، ليكن  $(n, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$

لدينا لكل  $k \in \{1; 2; \dots; n\}$

$$z_k + 1 = 1 + \cos\left(\frac{r}{n} + \frac{2kf}{n}\right) + i \sin\left(\frac{r}{n} + \frac{2kf}{n}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{r}{2n} + \frac{kf}{n}\right) + 2 \sin\left(\frac{r}{2n} + \frac{kf}{n}\right) \sin\left(\frac{r}{2n} + \frac{kf}{n}\right) i$$

$$z_k + 1 = 2 \cos\left(\frac{r}{2n} + \frac{kf}{n}\right) \left( \cos\left(\frac{r}{2n} + \frac{kf}{n}\right) + \sin\left(\frac{r}{2n} + \frac{kf}{n}\right) i \right)$$

$$(z_k + 1)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{r}{2n} + \frac{kf}{n}\right) \left( \cos\left(\frac{r}{2} + kf\right) + \sin\left(\frac{r}{2} + kf\right) i \right) : \text{منه}$$

طريقة 1

▪ إذا كان:  $\cos^n\left(\frac{r}{2n} + \frac{kf}{n}\right) > 0$  فإن:  $\arg((z_k + 1)^n) \equiv 0 + \frac{r}{2} + kf [2f] \equiv \frac{r}{2} [f]$

▪ إذا كان:  $\cos^n\left(\frac{r}{2n} + \frac{kf}{n}\right) < 0$  فإن:  $\arg((z_k + 1)^n) \equiv f + \frac{r}{2} + kf [2f] \equiv \frac{r}{2} [f]$

▪ إذا كان:  $\cos^n\left(\frac{r}{2n} + \frac{kf}{n}\right) = 0$  فإن:  $(z_k + 1)^n = 0$

في كل الحالات نجد أن  $M_k$  إما تنطبق مع  $O$  أو تنتمي للمستقيم المار من  $O$  والذي يكون الزاوية  $\frac{r}{2}$  مع

$(O, \vec{e}_1)$ ، بالتالي النقط  $M_1$  و  $M_2$  و ... و  $M_n$  مستقيمة

طريقة 2: لدينا لكل  $p, q \in \{1; 2; \dots; n\}$

$$\frac{(z_p + 1)^n}{(z_q + 1)^n} = \frac{2^n \cos^n\left(\frac{r}{2n} + \frac{pf}{n}\right) \left( \cos\left(\frac{r}{2} + pf\right) + \sin\left(\frac{r}{2} + pf\right) i \right)}{2^n \cos^n\left(\frac{r}{2n} + \frac{qf}{n}\right) \left( \cos\left(\frac{r}{2} + qf\right) + \sin\left(\frac{r}{2} + qf\right) i \right)} = \frac{\cos^n\left(\frac{r}{2n} + \frac{pf}{n}\right)}{\cos^n\left(\frac{r}{2n} + \frac{qf}{n}\right)} [1; (p-q)f] \in \mathbb{R}$$

إذن لكل  $p, q \in \{1; 2; \dots; n\}$  و  $M_p$  و  $M_q$  مستقيمة مع  $O$ ، بالتالي النقط  $M_1$  و  $M_2$  و ... و  $M_n$  مستقيمة

🍀 للتذكير  $\forall r \in \mathbb{R}^* \forall k \in \mathbb{Z} [r; kf] \in \mathbb{R}$

**تمرين 4:** نعتبر العدد:  $Z = \cos_\theta + i \sin_\theta$  حيث  $\theta \in ]-f; f[$

لدينا  $|Z| = 1$  منه:  $Z \bar{Z} = 1$  منه:  $1 + Z + Z^2 = Z \bar{Z} + Z + Z^2 = Z(\bar{Z} + 1 + Z) = (1 + Z + \bar{Z})Z = (1 + 2 \cos_\theta)Z$

▪ إذا كان:  $\cos_\theta = \frac{-1}{2}$  فإن:  $1 + Z + Z^2 = 0$  (لا يمكن كتابته على الشكل المثلثي)

▪ إذا كان:  $\cos_\theta > \frac{-1}{2}$  فإن:  $1 + Z + Z^2 = [1 + 2 \cos_\theta; \theta]$

▪ إذا كان:  $\cos_\theta < \frac{-1}{2}$  فإن:  $1 + Z + Z^2 = [-(1 + 2 \cos_\theta); \theta + f]$

🍀 الشكل المثلثي  $r(\cos_\theta + i \sin_\theta)$  يستوجب أن يكون  $r > 0$ ، فإذا كان سالبا يكون لدينا:

$$r(\cos_\theta + i \sin_\theta) = (-r) \times (-1) \times [1; \theta] = [-r; 0] \times [1; f] \times [1; \theta] = [-r; \theta + f]$$

🍀 الشكل الأسّي لا يستوجب الشرط السابق