

ب- حل المعادلة: (E_1)

ج- أكتب حل المعادلة (E_1) على الشكل المثلثي وعلى الشكل λi و

λj حيث: $(\lambda \in \mathbb{R})$.

2. أ- أشر $P(z)$.

ب- استخرج حلول المعادلة:

$$(E): (z \in \mathbb{C} : z^3 + 8i = 0)$$

3. لتكن a و b و c هي حلول المعادلة (E) بحيث:

$$\operatorname{Re}(a) = 0 \quad \text{و} \quad \operatorname{Re}(b) < 0 \quad \text{و} \quad \operatorname{Re}(c) > 0$$

$$a + bj + cj^2 = 0 \quad \text{أد تحقق من أن:}$$

ب- في المستوى المنسوب إلى معلم شعاع منظم ومباشر

(O, \vec{u}, \vec{v}) ، نعتبر النقط A و B و C التي أحاطها على التوالي

هي a و b و c . بين أن ABC مثلث متساوي الأضلاع.

:3

1. بين أن:

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^{2ix} - 1 = 2i \sin(x) e^{ix}$$

2. حل في \mathbb{C} المعادلة التالية: $(Z+1)^n = e^{2ina}$ ، حيث:

$$n \in \mathbb{N}^+, a \in \mathbb{R}$$

$$3. \text{ نضع: } \forall n \in \mathbb{N}^+ : P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$$

$$P_n = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}} \quad \text{أثبت أن:}$$

:4

لتكن θ عددا حقيقيا. لتكن z من \mathbb{C} . نضع:

$$P(z) = z^3 + (1+3ie^{i\theta})z^2 + (1+i(1+3e^{i\theta}))z + (3i-3)e^{i\theta}$$

1. بين أن $z_1 = -3ie^{i\theta}$ حل للمعادلة:

$$(E): z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$$

2. أ- حدد العددين العقديين a و b بحيث:

$$\forall z \in \mathbb{C}: P(z) = (z + 3ie^{i\theta})(z^2 + az + b)$$

ب- ليكن z_2 و z_3 الحلين الآخرين لمعادلة (E) .

حدد z_2 و z_3 (z_2 هو الحل التخيلي الصرف)

3. أ- أكتب z_1 و z_2 و z_3 على الشكل المثلثي.

ب- نضع: $\theta = \frac{\pi}{10}$. حدد الشكل الجبري لعدد العقدي α

:1

ليكن f التطبيق من $\mathbb{C} - \{i\}$ نحو $\mathbb{C} - \{i\}$ المعرف بما يلي:

$$f(z) = \frac{iz}{z-i}$$

في المستوى المنسوب إلى معلم شعاع منظم ومباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) ،

نعتبر النقطة B ذات الحوق i ونربط كل نقطة M بنقطة z .

1. حدد المجموعتين التاليتين:

$$E_1 = \{ M(z) / f(z) \in \mathbb{R} \}$$

$$E_2 = \{ M(z) / f(z) \in i\mathbb{R} \}$$

2. حل في $\mathbb{C} - \{i\}$ المعادلة $f(z) = -2z + 1$.

3. ليكن $z \in \mathbb{C} - \{i\}$. نعتبر r معيار $z-i$ و α قياسا لعمدة

$$z-i$$

أد أكتب $f(z) - i$ على الشكل المثلثي.

ب- حدد (\mathcal{E}) ، مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون:

$$|f(z) - i| = \sqrt{2}$$

ج- حدد (\mathcal{D}) ، مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون:

$$\arg(f(z) - i) = \frac{\pi}{4}$$

د- حدد z_0 بحيث $f(z_0) = 1 + 2i$ لتكن A النقطة ذات

الحوق z_0 . تحقق من أن A تنتمي إلى (\mathcal{E}) و (\mathcal{D}) .

أنشئ (\mathcal{E}) و (\mathcal{D}) .

:2

A نضع: $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ j est l'entier de JACOBI

(j هو جذر من الرتبة الثالثة لتوحدة: $j^3 = 1$)

1. تحقق من أن: $j^2 = \bar{j}$ و أن $1 + j + j^2 = 0$.

2. أكتب على الشكل المثلثي العددين العقديين $2i$ و j .

B نعتبر P و Q التطبيقين من \mathbb{C} نحو \mathbb{C} المعرفين كما يلي:

$$P(z) = (z - 2i\bar{j})Q(z)$$

$$Q(z) = z^2 + 2ij^2z - 4j$$

1. أ- نعتبر المعادلة:

$$(E_1): (z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0)$$

تحقق من أن المميز المختصر Δ' يساوي $(\sqrt{3}j^2)^2$

$$\alpha = z_1^5 + z_2^5 + z_3^5$$

حيث :

المشوى العقدي \mathcal{D} منسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$. لنك z من \mathbb{C} ، نضع $f(z) = z^2 - 2jz - 1$

$$حيث \quad j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1. حل في \mathbb{C} المعادلة : $f(z) = 0$.

2. حدد وأنشئ المجموعة :

$$(H) = \{ M(z) \in P \mid f(z) \in \mathbb{R} \}$$

3. ليكن التطبيق :

$$F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$$

$$M(z) \rightarrow M'(f(z))$$

ولكن (\mathcal{E}) الدائرة التي مركزها $A(j)$ وشعاعها r و (\mathcal{D})

المستقيم الذي يمر من A ومعامنه الموجه $\tan(\theta)$ حيث :

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

أ- تحقق من أن : $\forall z \in \mathbb{C} : f(z) - j = (z - j)^2$

ب- حدد طبيعة صورة كل من المجموعتين (\mathcal{E}) و (\mathcal{D}) بالتطبيق

F .

6 :

في المشوى الأفيني \mathcal{D} المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر

$(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ ، نعتبر النقطتين $A(i)$ و $A'(-i)$ ، وليكن f

التطبيق من $\mathbb{C} - \{i\}$ نحو \mathbb{C} والمعرف بما يلي :

$$f(z) = \frac{\bar{z}(z-i)}{z+i}$$

وليكن F التطبيق من $\mathcal{D} - \{A\}$ نحو \mathcal{D} الذي يربط كل نقطة

$M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ حيث : $z' = f(z)$.

1. أ- أثبت أنه إذا كان $z \neq 0$ و $z' \neq 0$ فإن :

$$|z| = |z'|$$

$$\arg(z') = -\arg(z) + 2\arg(z-i) \quad [2\pi]$$

(لاحظ أن $z-i$ و $\bar{z}+i$ مترافقان)

ب- بين أنه إذا كان $|z|=1$ فإن $f(z) = -i$.

2. أ- حدد مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق F .

ب- ماهي مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون $f(z)$ على

شكل ai مع a عنصر من \mathbb{R} ؟

$$3. \text{ أ- أثبت أن : } z' + i = \frac{z\bar{z}-1}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)$$

$$\text{وأن : } z' - z = \frac{-i(z+\bar{z})}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)$$

ب- استنتج أن المشجعتين \overline{AM} و $\overline{A'M'}$ متشابهتان.

وأن \overline{AM} و $\overline{MM'}$ متعامدتان.

ج- أعط طريقة للإنشاء الهندسي لصورة M بالتطبيق F .

$$\text{نضع : } j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$$

في المشوى العقدي \mathcal{D} منسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر (O, \bar{u}, \bar{v}) ، نعتبر النقط A و B و C التي أحاطها على التوالي

هي $a=8$ و $b=6j$ و $c=8j^2$.

تكن A' صورة B بالدوران $R\left(C, \frac{\pi}{3}\right)$

B' صورة C بالدوران $R\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$

C' صورة A بالدوران $R\left(B, \frac{\pi}{3}\right)$

1. أنشئ النقط A و B و C و A' و B' و C' .

2. نضع a' و b' و c' على التوالي الحلق النقط A' و B' و C' أ- أحسب a' . (تحقق من أن $a' \in \mathbb{R}$)

ب- بين أن : $b' = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ، واستنتج أن $O \in (BB')$.

ج- بين أن : $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$.

د- بين أن المستقيمت (AA') و (BB') و (CC') تتلاقى في النقطة O .

3. فيما يلي نود أن نبين أن المسافة $MA + MB + MC$ تكون دنوية إذا كان $M = O$.

أ- أحسب $OA + OB + OC$.

ب- بين أن : $1 + j + j^2 = 0$ و $j^3 = 1$.

ج- لتكن M النقطة التي نلحقها z . تحقق مما سبق أن :

$$|(a-z) + (b-z)j + (c-z)j^2| =$$

$$|a + tj + cj^2| = 22$$

د- نعلم أن لكل الأعداد العقدية z و z' و z'' ، لدينا :

$$|z + z' + z''| \leq |z| + |z'| + |z''|$$

بين أن المسافة $MA + MB + MC$ تكون دنوية إذا كان

$$M = O$$

(النقطة $M = O$ تسمى نقطة Torricelli)