مذكرة رقم 1 في درس المنطق 8 س

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
ـ العبـارات؛ العمليـات علـى العبـارات؛ الـدوال العبارية؛ المكممات، ـ الاستدلالات الرياضية: الاستدلال بـالخلف؛ الاستدلال بمضـاد العكس؛ الاستدلال بفصل الحالات؛ الاستدلال بالتكافؤ؛ الاستدلال بالترجع.	ـ التمكن من استعمال الاستدلال المناسب حسب الوضعية المدروسة؛ ـ الـتمكن مـن صـياغة بـراهين واسـتدلالات رياضية واضحة وسليمة منطقيا.	ـ ينبغي تقريب العبـارات والقوانين المنطقية وطرائق الاستدلال انطلاقا من أنشطة متنوعة ومختلفة مستقاة من الرصيد المعرفـي للتلميذ ومـن وضـعيات رياضـية سـبق لـه التعامـل معها؛ ـ ينبغي تجنب البنـاء النظـري والإفراط في استعمال جداول الحقيقة؛ ـ إن درس المنطـق لا ينتهـي بانتهـاء هـذا الفصل بل ينبغي استثمار نتائجه، كلما سنحت الفرصـة لـذلك، بمختلـف فصـول المقـرر اللاحقة.

نشاط1:

1. أنقل الجدول التالي ثم ضع العلامة "x" في الخانة المناسبة .

	صحيح	خاطئ
كل زوجي قابل للقسمة على 4		x
مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي	x	
$\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$		x
اذا كان n^2 عددا فرديا فان n عدد فردي	x	
المعادلة : $x^2=-1$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$		x
جميع المستقيمات المتعامدة في الفضاء متقاطعة		x
114516 مضاعف للعدد 4	x	
$\left((-2)^2=-4\right)$		x

2. هل توجد من بين الجمل الواردة في الجدول أعلاه جمل صحيحة و خاطئة في آن واحد

الجواب : كل النصوص الرياضيةاما صحيحة و إما خاطئة وتسمى عبارات

I. العبارات و العمليات على العبارات

1.1 العبارات

نسمي عبارة كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا و إما خاطئا

نرمز عادة لعبارة بأحد الرموز p أو q أو r ......

غالبا ما نعبر عن حقيقة عبارة بجدول يسمى جدول حقيقة عبارة :

الرمز 1 يعني أن العبارة p صحيحة

و الرمز 0 يعني أن العبارة p خاطئة

p
1
0

1.2 العمليات على العبارات

1.2.1 نفي عبارة

نعتبر العبارة : " 3 عدد زوجي " p

ما قيمة حقيقة العبارة p حدد نفي العبارة p نرمز لها ب $\overline{p}$

ما قيمة حقيقة العبارة $\overline{p}$ إذن نفي عبارة p هو كل عبارة تكون صحيحة إذا كانت p خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت p صحيحة

نرمز لنفي العبارة p بالرمز $\overline{p}$ أو $\neg p$

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

أمثلة:

حدد العبارة النافية و قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية:

- $p \quad \left((-2)^2=4\right)$
- $q \quad \sqrt{2}\in\mathbb{Q}$

الأجوبة: p عبارة صحيحة : $\left((-2)^2\neq 4\right)$: $\overline{p}$

q عبارة خاطئة : $\left(\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\right)$: $\overline{q}$

1.2.2 عطف عبارتين

عطف عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : q و p والتي تكون صحيحة فقط ا إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا.

جدول حقيقة العطف المنطقي

p	q	q و p
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

أمثلة: حدد قيمة حقيقة العبارات الآتية :

A" $\left((-2)^2>3\right)$ و $\left(\sqrt{3}\geq 1\right)$ " B" $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}>3\right)$ و $\sqrt{2}\in Q$ "

الأجوبة: A عبارة صحيحة : لأنها مكونة من عبارتين صحيحتين

A عبارة صحيحة : لأنها مكونة من عبارتين صحيحتين

B عبارة خاطئة : لأنها عطف عبارة صحيحة مع عبارة خاطئة

1.2.3 فصل عبارتين

فصل عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p$ أو $q)$ والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت العبارتان p و q خاطئتين معا.

p	q	q أو p
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

أمثلة: حدد قيمة الحقيقة و العبارة النافية لكل عبارة من العبارات الآتية :

A" $\left(\frac{1}{2}\in\mathbb{N}\right)$ أو $\left(\sqrt{4}=2\right)$ "

B" (3عدد فردي) أو $\left((-2)^2>3\right)$ "

C" $(\pi=3.14)$ و $\left(\sqrt{2}\leq 1\right)$ "

الأجوبة: A عبارة صحيحة : لأن $\left(\sqrt{4}=2\right)$ عبارة صحيحة

B عبارة صحيحة : لأنها فصل عبارتين صحيحتين

C عبارة خاطئة : لأنها فصل عبارتين خاطئتين

$\overline{A}$" $(\sqrt{4}\neq 2)$ و $\left(\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}\right)$"

$\overline{B}$" $\left((-2)^2\leq 3\right)$ و 3عدد زوجي)"

$\overline{C}$" $(\sqrt{2}>1)$ أو $(\pi\neq 3.14)$)"

1.2.4. **استلزام عبارتين:** استلزام عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p\Rightarrow q)$ والتي تكون خاطئة فقط اذا كانت p صحيحة و q خاطئة

p	q	$(p\Rightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ملاحظات

❖ العبارة : $(p\Rightarrow q)$ تقرأ : " p تستلزم q " أو " اذا كانت p فان q "

❖ العبارة : $(q\Rightarrow p)$ تسمى الاستلزام العكسي للاستلزام $(p\Rightarrow q)$

❖ للبرهان أن العبارة : $(p\Rightarrow q)$ صحيحة نفترض أن العبارة p صحيحة و نبين أن العبارة q صحيحة

مثال1: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

A" عدد فردي 2 $\Rightarrow$ $(0,1\in\mathbb{N})$"

B" $n>4 \Rightarrow n>2$"

الأجوبة: A عبارة صحيحة و B عبارة صحيحة

نشاط: أتمم ملأ الجدول التالي :

p	q	$\overline{p}$	q أو $\overline{p}$	$(p\Rightarrow q)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

نتيجة : العبارتان $(p\Rightarrow q)$ و q أو $\overline{p}$ متكافئتان

مثال2: حدد نفي العبارة الآتية :

A" $x^2=9\Rightarrow x=3$ أو $x=-3$"

1.2.5. تكافؤ عبارتين

تكافؤ عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p\Leftrightarrow q)$ والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا أو خاطئتين معا.

العبارة : $(p\Leftrightarrow q)$ تقرأ : " p تكافئ q "

أمثلة: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$(\sqrt{3}\geq 1) \Leftrightarrow \left((-2)^2=4\right)$

$(\sqrt{5}\geq 3) \Leftrightarrow -1\in\mathbb{N}$

p	q	$(p\Leftrightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

جدول حقيقة التكافؤ المنطقي

خاصية : العبارتان $(p\Leftrightarrow q)$ و $[(p\Rightarrow q)$ و $(q\Rightarrow p)]$ متكافئتان

II. الدالة العبارية و المكممات.

نشاط1: نعتبر التعبير التالي : $(x\in\mathbb{R});x^2-x\geq 0$

- حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x=2$
- حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x=\frac{1}{2}$
- حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x=-1$

الأجوبة : من أجل $x=2$ نجد : $2\geq 0$ ومنه نحصل على عبارة صحيحة

من أجل $x=2$ نجد : $-\frac{1}{4}\geq 0$ ومنه نحصل على عبارة خاطئة

من أجل $x=\frac{1}{2}$ نجد : $-\frac{1}{4}\geq 0$ ومنه نحصل على عبارة خاطئة

من أجل $x=-1$ نجد : $2\geq 0$ ومنه نحصل على عبارة صحيحة

إذن التعبير: $(x\in R);x^2-x\geq 0$ يصبح صحيحا من أجل بعض قيم x من $\mathbb{R}$ خاطئا من أجل بعض قيم x

نقول أننا أمام دالة عبارية تحتوي على متغير x ينتمي إلى المجموعة $\mathbb{R}$

نكتب : $\exists x\in\mathbb{R}/x^2-x\geq 0$ ونقرأ يوجد x من $\mathbb{R}$ بحيث $x^2-x\geq 0$

نشاط2: نعتبر التعبير التالي : $(n\in\mathbb{N});n^2\geq 0$

- حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $n=2$
- هل توجد قيم ل : n لا تحقق التعبير السابق؟

الأجوبة : من أجل $n=2$ نحصل على: عبارة صحيحة

نلاحظ أننا نحصل على عبارة صحيحة مهما تكن قيمة المتغير n

نكتب : $\forall n\in\mathbb{N}/n^2\geq 0$

1) الدالة العبارية

نسمي دالة عبارية كل نص رياضي يحتوي على متغير (أو عدة متغيرات) ينتمي إلى مجموعة معلومة E حيث تصبح عبارة كلما عوضنا المتغير بعنصر من E ونرمز عادة لدالة عبارية بالرلز أو $B(x)$ أو $A(x;y)$ ....

2) العبارات المكممة

انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\exists x\in E, A(x)$ " ونقرأ : " يوجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$ " وتكون العبارة " $\exists x\in E, A(x)$ " صحيحة إذا وجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$

انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\forall x\in E, A(x)$ " ونقرأ : " مهما يكن x من E لدينا $A(x)$ " وتكون العبارة " $\forall x\in E, A(x)$ " صحيحة إذا كانت جميع عناصر E تحقق الخاصية $A(x)$.

تمرين1: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

1. "$\forall x\in\mathbb{R}/x^2>0$"
2. " $\exists x\in\mathbb{R}, x^2-2=0$ "
3. " 5عدد فردي $\Leftrightarrow$ $\exists x\in\mathbb{R}, x^2+1=0$ "
4. " $(2<\sqrt{3})\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}/\frac{n}{2}\in\mathbb{N}$ "
5. $(\forall x\in\mathbb{R});-1\leq\cos x\leq 1$
6. $(\forall n\in\mathbb{N});(\exists m\in\mathbb{N}):n<m$
7. $2n+1$ عدد زوجي $(\exists n\in\mathbb{N})$
8. $(\forall n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\in\mathbb{N}$
9. $(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y-x>0$
10. $(\exists! x\in\mathbb{R});2x+4=0$
11. $(\exists! x\in\mathbb{R});x^2=2$
12. $(\exists x\in\mathbb{Z});\frac{x}{4}\in\mathbb{Z}$
13. $(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y^2=x$

الأجوبة: 1) خاطئة 2) صحيحة 3) خاطئة 4) خاطئة 5) صحيحة 6) صحيحة 7) خاطئة 8) خاطئة 9) صحيحة 10) صحيحة 11) خاطئة 12) صحيحة 13) خاطئة نأخذ $x=-1$

خاصية : نفي العبارة " $\forall x\in E, A(x)$ " هو العبارة " $\exists x\in E, \overline{A(x)}$ "

نفي العبارة " $\exists x\in E, A(x)$ " هو العبارة " $\forall x\in E, \overline{A(x)}$ "

تمرين2: حدد العبارة النافية للعبارات الآتية: 1) $(\forall n\in\mathbb{N}); 2^n \succ 5(n+1)$

2) " $\exists x\in\mathbb{R}, x^2-2=0$ و $-\frac{3}{2}\in\mathbb{Q}$ "

3) $(\forall n\in\mathbb{N});(\exists m\in\mathbb{N}): n<m$ 4) كل مثلث قائم الزاوية له زاوية حادة

5) توجد نافذة في المؤسسة مكسورة 6) $(\forall n\in\mathbb{Z}): n\in\mathbb{Z}\Rightarrow n\geq 0$

الأجوبة: 1) $(\exists n\in\mathbb{N}): 2^n\leq 5(n+1)$

2) $(\forall x\in\mathbb{R}): x^2-2\neq 0$ أو $-\frac{3}{2}\notin\mathbb{Q}$

3) $(\exists n\in\mathbb{N});(\forall m\in\mathbb{N}): n\geq m$ 4) يوجد مثلث قائم الزاوية له زاوية غيرحادة

5) كل نوافذ المؤسسة غير مكسورة 6) $(\exists n\in\mathbb{Z}): n\in\mathbb{Z}$ و $n<0$

تمرين3: حدد العبارة النافية للعبارات الآتية:

1) $P;(\forall x\in\mathbb{R}): x\neq 2\Rightarrow x^2\neq 4$

2) $Q;(\exists x\in\mathbb{R}): x<2\Rightarrow x^2\geq 2015$

الأجوبة: 1) $\overline{P};(\exists x\in\mathbb{R}): x\neq 2$ و $x^2=4$

2) $\overline{Q};(\forall x\in\mathbb{R}): x<2$ و $x^2<2015$

III. الاستدلالات الرياضية.

1. الاستدلال الاستنتاجي :

مثال : ليكن $x\in\mathbb{R}$ بين أن: $2<x<4\Rightarrow \frac13<\frac{1}{x-1}<1$

الأجوبة: نفترض أن : $2<x<4$ ونبين أن : $\frac13<\frac{1}{x-1}<1$

لدينا : $2<x<4$ اذن : $2-1<x-1<4-1$

اذن : $1<x-1<3$ اذن : $\frac13<\frac{1}{x-1}<1$

ومنه : $2<x<4\Rightarrow\frac13<\frac{1}{x-1}<1$

تمرين4: ليكن $x\in\mathbb{R}$ بين أن : $-2<x<\frac13\Rightarrow\frac{-3x+5}{x+4}<\frac{11}{2}$

الأجوبة: نفترض أن : $-2<x<\frac13$ ونبين أن : $\frac{-3x+5}{x+4}<\frac{11}{2}$

لدينا : $-2<x<\frac13$ اذن: $-2+4<x+4<\frac13+4$ اذن $2<x+4<\frac{13}{3}$ اذن $\frac{3}{13}<\frac{1}{x+4}<\frac12$

ولدينا : $-2<x<\frac13$ اذن $-6<3x<1$ اذن: $-1<-3x<6$

اذن $4<-3x+5<11$

ومنه : $\frac{12}{13}<\frac{-3x+5}{x+4}<\frac{11}{2}$ ومنه $\frac{-3x+5}{x+4}<\frac{11}{2}$

الاستدلال بالمثال المضاد :

مثال : بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

p " $(\forall x\in\mathbb{R}^*); x+\frac1x\geq 2$ "

الجواب : نعتبر: $x=-2$ لدينا : $-2+\frac{1}{-2}=-\frac52<2$ اذن : p خاطئة

تمرين5: بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

p " $\forall x\in]0;1[$ و $\forall y\in]0;1[$, $0<\frac{x+y}{xy(1-xy)}<1$ "

الجواب : نعتبر: $x=\frac12$ و $y=\frac12$ لدينا : $\frac{\frac12+\frac12}{\frac14\left(1-\frac14\right)}=\frac{1}{\frac14\times\frac34}=\frac{1}{\frac{3}{12}}=\frac{12}{3}>1$

اذن : p خاطئة

2. الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

لكي نبرهن أن الاستلزام $(p\Rightarrow q)$ صحيح يكفي أن نبرهن أن الاستلزام المضاد للعكس $(\overline{q}\Rightarrow\overline{p})$ صحيح

مثال1: ليكن $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$ بين أن: $x+y>1\Rightarrow y>\frac12$ أو $x>\frac12$

الجواب: نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $x\leq\frac12$ و $y\leq\frac12\Rightarrow x+y\leq 1$ ؟؟؟؟؟

لدينا: $x\leq\frac12$ و $y\leq\frac12$ اذن : $x+y\leq\frac12+\frac12$ اذن: $x+y\leq 1$

ومنه : $x\leq\frac12$ و $y\leq\frac12\Rightarrow x+y\leq1$ وبالتالي : $x+y>1\Rightarrow y>\frac12$ أو $x>\frac12$

تمرين6: بين باستعمال الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس أنه : اذا كان : $x\in]1;+\infty[$ و $y\in]1;+\infty[$

$(x\neq y)\Rightarrow(x^2-2x\neq y^2-2y)$

الجواب: نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $x^2-2x=y^2-2y\Rightarrow x=y$ ؟؟؟؟؟

لدينا: $x^2-2x=y^2-2y\Rightarrow x^2-2x-y^2+2y=0$

$\Rightarrow x^2-y^2-2(x-y)=0\Rightarrow(x-y)(x+y)-2(x-y)=0$

$\Rightarrow(x-y)(x+y-2)=0\Rightarrow x-y=0$ أو $x+y-2\Rightarrow x=y$ أو $x+y-2=0$

ونعلم أن : $x\in]1;+\infty[$ يعني $x>1$ و: ونعلم أن : $y\in]1;+\infty[$ يعني $y>1$

ومنه $x+y>2$ يعني $x+y-2>0$ ومنه $x+y-2\neq0$

ومنه : $x^2-2x=y^2-2y\Rightarrow x=y$

وبالتالي: $(x\neq y)\Rightarrow(x^2-2x\neq y^2-2y)$

تمرين7: ليكن : $x\in\mathbb{R}$ بين أن: $x\neq-8\Rightarrow\frac{x+2}{x+5}\neq2$

الجواب: نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $\frac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow x=-8$ ؟؟؟؟؟

لدينا: $\frac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow x+2=2(x+5)$

$x+2=2(x+5)\Rightarrow x+2=2x+10\Rightarrow -x=8\Rightarrow x=-8$

ومنه : $\frac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow x=-8$

تمرين8: $x\in]1;+\infty[$ و $y\in]2;+\infty[$

بين أن: $(x\neq y)\Rightarrow(x^2-3x\neq y^2-3y)$

الجواب: نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $x^2-3x=y^2-3y\Rightarrow x=y$ ؟؟؟؟؟

لدينا: $x^2-3x=y^2-3y\Rightarrow x^2-3x-y^2+3y=0$

$\Rightarrow x^2-y^2-3(x-y)=0\Rightarrow(x-y)(x+y)-3(x-y)=0$

$\Rightarrow(x-y)(x+y-3)=0\Rightarrow x-y=0$ أو $x+y-3\Rightarrow x=y$ أو $x+y-3=0$

ونعلم أن : $x\in]1;+\infty[$ يعني $x>1$ و: ونعلم أن : $y\in]2;+\infty[$ يعني $y>2$

ومنه $x+y>3$ يعني $x+y-3>0$ ومنه $x+y-3\neq0$

ومنه : $x^2-3x=y^2-3y\Rightarrow x=y$

وبالتالي: $(x\neq y)\Rightarrow(x^2-3x\neq y^2-3y)$

3. الاستدلال بالتكافؤ:

يعتمد الاستدلال بالتكافؤ على القانون المنطقي التالي :

إذا كان : $(p\Leftrightarrow q)$ و $(q\Leftrightarrow r)$ فان : $(p\Leftrightarrow r)$

مثال: بين أن : $\forall(a;b)\in(\mathbb{R}^{*+})^2\quad a+b\geq2\sqrt{ab}$

الجواب :نستعمل الاستدلال بالتكافؤ:

$$a+b\ge 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt a\right)^2+\left(\sqrt b\right)^2-2\sqrt{ab}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt a-\sqrt b\right)^2\ge 0$$

وهذا صحيح لأن المربع دائما موجب

وبالتالي : $\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2 \quad a+b\ge 2\sqrt{ab}$

تمرين9: بين أن : $\forall x>0 , x+\frac{1}{x}\ge 2$

الجواب :نستعمل الاستدلال بالتكافؤ: $\forall x>0$

$$x+\frac{1}{x}\ge 2\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x}\ge 2\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x}\ge 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x}-2\ge 0\Leftrightarrow \frac{x^2+1-2x}{x}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1-2x}{x}\ge 0\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x}\ge 0$$

والعبارة : $\frac{(x-1)^2}{x}\ge 0$ صحيحة لأن : المربع موجب و $\forall x>0$

و بالتالي $\forall x>0;x+\frac{1}{x}\ge 2$ صحيحة

4.الاستدلال بفصل الحالات :

مثال: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(E):|3x-6|=1$

الجواب :ندرس اشارة : $3x-6$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	$-$	0	$+$

الحالة 1: اذا كانت : $x\ge 2$ فان : $3x-6\ge 0$ ومنه : $(E):|3x-6|=1$

$$x=\frac{7}{3}\in S \Leftrightarrow 3x=7\Leftrightarrow 3x-6=1\Leftrightarrow$$

الحالة 2: اذا كانت : $x\le 2$ فان : $3x-6\le 0$ ومنه : $(E):|3x-6|=1$

$$x=\frac{5}{3}\in S \Leftrightarrow -3x=-5\Leftrightarrow -3x+6=1\Leftrightarrow -(3x-6)=1\Leftrightarrow$$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\left\{\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right\}$

تمرين10: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $3+2|x-4|=x+5$

الجواب :ندرس اشارة : $x-4$

الحالة 1: اذا كانت : $x\ge 4$ فان : $x-4\ge 0$ ومنه : $|x-4|=x-4$

$$3+2|x-4|=x+5$$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$x-4$	$-$	0	$+$

$$3+2x-8=x+5\Leftrightarrow$$

$$x=10\in S\Leftrightarrow$$

الحالة 2: اذا كانت : $x\le 4$ فان : $x-4\le 0$ ومنه : $|x-4|=-x+4$

$$x=2\in S\Leftrightarrow 3-2x+8=x+5\Leftrightarrow 3+2|x-4|=x+5$$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\{2;10\}$

تمرين11: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E):x^2-|x+1|+1=0$

الجواب :ندرس اشارة : $x+1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$

الحالة1: اذا كانت : $x\ge -1$ فان : $x+1\ge 0$

ومنه : $(E):x^2-|x+1|+1=0$

$$x(x-1)=0\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x^2-(x+1)+1=0\Leftrightarrow$$

$x=0\in S$ أو $x=1\in S\Leftrightarrow$

الحالة2: اذا كانت : $x\le -1$ فان : $x+1\le 0$

ومنه : $(E):x^2-|x+1|+1=0$

$x^2+x+2=0\Leftrightarrow x^2+(x+1)+1=0\Leftrightarrow$ وهذه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ لأن : $\Delta=-7<0$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\{0;1\}$

تمرين12: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات. بين أن : n^2+n عدد زوجي $\forall n\in\mathbb{N}$

الجواب: الحالة 1: n عدد زوجي اذن : $\exists k\in\mathbb{N}/n=2k$

$$n^2+n=(2k)^2+2k=4k^2+2k=2\left(2k^2+k\right)=2k'$$

ومنه : n^2+n عدد زوجي

الحالة 2: n عدد فردي اذن : $\exists k\in\mathbb{N}/n=2k+1$

$$n^2+n=(2k+1)^2+2k+1=4k^2+4k+1+2k+1$$

$$n^2+n=4k^2+6k+2=2\left(2k^2+3k+1\right)=2k'$$

ومنه : n^2+n عدد زوجي

وبالتالي : n^2+n عدد زوجي $\forall n\in\mathbb{N}$

5.الاستدلال بالخلف :

لكي نبرهن أن عبارة صحيحة نفترض أن العبارة خاطئة ونحاول الحصول على تناقض مع المعطيات

مثال1: بين باستعمال الاستدلال بالخلف أن : $\forall x\in\mathbb{R}/\frac{x^2-1}{x^2+1}\ne 1$

الجواب : نفترض أن : $\exists x\in\mathbb{R}/\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$

يعني $x^2-1=x^2+1$ يعني $-1=+1$ وهذا غير صحيح

ومنه ما افترضناه كان خاطئا أي : $\forall x\in\mathbb{R}/\frac{x^2-1}{x^2+1}\ne 1$

تمرين13: $n\in\mathbb{N}$ **بين أنه اذا كان** n^2 عدد زوجي فان : n عدد زوجي

الجواب : نفترض أن : n عدد فردي أي أن : $\exists k\in\mathbb{N}/n=2k+1$

ومنه : $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2\left(2k^2+2k\right)+1=2k'+1$

أي : n^2 عدد فردي و هذا يتناقض مع المعطيات : n^2 عدد زوجي

ومنه ما افترضناه كان خاطئا أي : n عدد زوجي

6. الاستدلال بالترجع

لتكن $p(n)$ عبارة مرتبطة بعدد صحيح طبيعي n

لكي نبرهن أن العبارة $p(n)$ صحيحة $\forall n\in\mathbb{N}$

نمر بثلاث مراحل :

- نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$
- نفترض أن العبارة صحيحة بالنسبة ل n
- نبين أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n+1$

مثال1: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N};3^n\ge 1+2n$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $3^0\ge 1+2\times 0$ أي : $1\ge 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $3^n\ge 1+2n$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $3^{n+1}\ge 1+2(n+1)$ أي نبين أن : $3^{n+1}\ge 2n+3$ ؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع :

$3^n\ge 1+2n$ اذن : $3^n\times 3\ge 3\times(1+2n)$

يعني : $3^{n+1}\ge 6n+3$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نلاحظ أن : $6n+3\ge 2n+1$ (يمكن حساب الفرق)

$(6n+3)-(2n+1)=6n+3-2n-1=4n+2\geq 0$

لدينا اذن : $3^{n+1}\geq 6n+3$ و $6n+3\geq 2n+1$ ومنه : $3^{n+1}\geq 2n+3$

تمرين14: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N};3^n\geq 1+n$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $3^0\geq 1+0$ أي : $1\geq 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $3^n\geq 1+n$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $3^{n+1}\geq 1+(n+1)$ أي نبين أن : $3^{n+1}\geq n+2$ ؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $3^n\geq 1+n$ اذن : $3^n\times 3\geq 3\times(1+n)$

يعني : $3^{n+1}\geq 3n+3$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نلاحظ أن : $3n+3\geq n+2$ (يمكن حساب الفرق)

$(3n+3)-(n+2)=3n+3-n-2=2n+1\geq 0$

لدينا اذن : $3^{n+1}\geq 3n+3$ و $3n+3\geq n+2$ ومنه : $3^{n+1}\geq n+2$

تمرين15: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N};2^n\geq 1+n$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $2^0\geq 1+0$ أي : $1\geq 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $2^n\geq 1+n$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $2^{n+1}\geq 1+(n+1)$ أي نبين أن : $2^{n+1}\geq n+2$ ؟؟؟؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $2^n\geq 1+n$ اذن : $2^n\times 2\geq 2\times(1+n)$

يعني : $2^{n+1}\geq 2n+2$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نلاحظ أن : $2n+2\geq n+2$ (يمكن حساب الفرق)

$(2n+2)-(n+2)=n\geq 0$

لدينا اذن : $2^{n+1}\geq 2n+2$ و $2n+2\geq n+2$ ومنه : $2^{n+1}\geq n+2$

تمرين16: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$:

$\forall n\in\mathbb{N}^*$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1=\frac{1\times(1+1)}{2}=\frac{1\times 2}{2}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}$ ؟؟

لدينا : $1+2+3+...+n+(n+1)=(1+2+3+...+n)+(n+1)$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

اذن : $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n\times(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$

$1+2+3+...+n+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

لدينا اذن : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

تمرين17: بين n^3+2n يقبل القسمة على 3 مهما يكن العدد الصحيح الطبيعي n

الجواب :يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}/n^3+2n=3k$

نستعمل الاستدلال بالترجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $0^3+2\times 0=0$ مضاعف للعدد 3 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}/n^3+2n=3k$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3+2(n+1)=3k'$ ؟؟؟؟؟

$(n+1)^3+2(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+2n+2=$

$(n^3+2n)+3n^2+3n+3=3k+3(n^2+n+1)=3(k+n^2+n+1)$

$=3(k+n^2+n+1)=3k'$ مع $k'=k+n^2+n+1$

ومنه : $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3+2(n+1)=3k'$

وبالتالي n^3+2n يقبل القسمة على 3 مهما يكن العدد الصحيح الطبيعي n

تمرين18: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$: $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1^2=\frac{1\times(1+1)\times(2+1)}{6}=\frac{1\times 2\times 3}{6}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$ ؟

لدينا : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=(1^2+2^2+3^2+...+n^2)+(n+1)^2$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$

اذن : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$

$1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)$

$=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right)=(n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right)$

ويمكننا أن نلاحظ أن : $2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$

ومنه : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$

تمرين19: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$\forall n\in\mathbb{N}^*:1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1^3=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^3=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}\right)^2$ ؟؟

لدينا : $1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=(1^3+2^3+3^3+...+n^3)+(n+1)^3$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

اذن : $1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3$

$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+(n+1)\right)=(n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)$

$=(n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4}=(n+1)^2\frac{(n+2)^2}{2^2}=^2\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$

ومنه : $\forall n\in\mathbb{N}^*:1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

تمرين20: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$\forall n\in\mathbb{N}:2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $2^0=1$ و $2^{0+1}-1=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n+2^{n+1}=2^{n+2}-1$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n+2^{n+1}=\left(2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n\right)+2^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$

اذن : $=2^{n+1}-1+2^{n+1}=2\times2^{n+1}-1=2^1\times2^{n+1}-1=2^{n+2}-1$

ومنه : $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n+2^{n+1}=2^{n+2}-1$

والتالي : $\forall n\in\mathbb{N}: 2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$

تمرين21: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$$\forall n\in\mathbb{N}: 5^0+5^1+5^2...+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $5^0=1$ و $\frac{5^{0+1}-1}{4}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $5^0+5^1+5^2...+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $5^0+5^1+5^2...+5^n+5^{n+1}=\frac{5^{n+2}-1}{4}$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $5^0+5^1+5^2+5^3+...+5^n+5^{n+1}=\left(5^0+5^1+5^2+5^3+...+5^n\right)+5^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $5^0+5^1+5^2...+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$

اذن : $5^0+5^1+5^2...+5^n+5^{n+1}=\frac{5^{n+1}-1}{4}+5^{n+1}$

$$=\frac{5^{n+1}-1+4\times5^{n+1}}{4}=\frac{5\times5^{n+1}-1}{4}=\frac{5^{n+2}-1}{4}$$

ومنه : $5^0+5^1+5^2...+5^n+5^{n+1}=\frac{5^{n+2}-1}{4}$

والتالي : : $\forall n\in\mathbb{N}: 5^0+5^1+5^2...+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$

تمرين(1:1) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}: 3^0+3^1+3^2...+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$

2) أ) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad 12n+14\ge6(n+1)+7$

ب) بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\ge6 \quad 2^n\ge6n+7$

الجواب :1) نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $3^0=1$ و $\frac{3^{0+1}-1}{2}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $3^0+3^1+3^2...+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $3^0+3^1+3^2...+3^n+3^{n+1}=\frac{3^{n+2}-1}{2}$ ؟؟

لدينا : $3^0+3^1+3^2+3^3+...+3^n+3^{n+1}=\left(3^0+3^1+3^2+3^3+...+3^n\right)+3^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $3^0+3^1+3^2...+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$

اذن : $3^0+3^1+3^2...+3^n+3^{n+1}=\frac{3^{n+1}-1}{2}+3^{n+1}$

$$=\frac{3^{n+1}-1}{2}+3^{n+1}=\frac{3^{n+1}-1+2\times3^{n+1}}{2}=\frac{3\times3^{n+1}-1}{2}=\frac{3^{n+2}-1}{2}$$

ومنه : $3^0+3^1+3^2...+3^n+3^{n+1}=\frac{3^{n+2}-1}{2}$

والتالي : : $\forall n\in\mathbb{N}: 3^0+3^1+3^2...+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$

2)أ) نبين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad 12n+14\ge6(n+1)+7$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق :

$$(12n+14)-(6(n+1)+7)=2n+14-6n-6-7=6n+1\ge0$$

ومنه : $\forall n\in\mathbb{N} \quad 12n+14\ge6(n+1)+7$

2)ب)نبين أن : $\forall n\ge6 \quad 2^n\ge6n+7$ ؟؟؟؟؟

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=6$

لدينا $2^6\ge6\times6+7$ لأن : $64\ge43$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=6$

المرحلة2: نفترض أن: $2^n\ge6n+7$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $2^{n+1}\ge6(n+1)+7$ ؟؟؟؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $2^n\ge6n+7$ اذن : $2\times2^n\ge2\times(6n+7)$

يعني : $2^{n+1}\ge12n+14$ اذن لم نجد بعد النتيجة

وحسب السؤال 2)أ) لدينا : $\forall n\in\mathbb{N} \quad 12n+14\ge6(n+1)+7$

لدينا اذن : $2^{n+1}\ge12n+14$ و $12n+14\ge6(n+1)+7$

ومنه : $2^{n+1}\ge6(n+1)+7$

وبالتالي : $\forall n\ge6 \quad 2^n\ge6n+7$ ؟؟؟؟؟

تمرين23: بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$.

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1\times(1+1)=1\times2=2$ و $\frac{1}{3}\times1\times(1+1)\times(1+2)=\frac{1}{3}\times2\times3=2$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)$

المرحلة3: نبين أن :

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)+(n+1)\times(n+2)=\frac{1}{3}(n+1)\times(n+2)\times(n+3)$$ ؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)$

اذن: $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)+(n+1)\times(n+2)=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)+(n+1)\times(n+2)$

$$=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)+(n+1)\times(n+2)=(n+1)\times(n+2)\left(\frac{1}{3}n+1\right)=(n+1)\times(n+2)\left(\frac{n+3}{3}\right)$$

ومنه $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)+(n+1)\times(n+2)=\frac{1}{3}(n+1)\times(n+2)\times(n+3)$

تمرين24: بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $\frac{1}{1\times2\times3}=\frac{1}{6}$ و $\frac{1\times(1+3)}{4(1+1)\times(1+2)}=\frac{4}{4\times2\times3}=\frac{1}{6}$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن:

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}$$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن:

$$S=\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{(n+1)\times(n+4)}{4(n+2)\times(n+3)}$$ ؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع :

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}$$

اذن :

$$=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{n\times(n+3)^2}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}+\frac{4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}$$

$$=\frac{n\times(n+3)^2+4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{n\times(n^2+6n+9)+4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}$$

يمكننا أن نبين أن : $n^3+6n^2+9n+4=(n+1)^2\times(n+4)$

ومنه: $S=\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{(n+1)^2\times(n+4)}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{(n+1)\times(n+4)}{4\times(n+2)\times(n+3)}$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}$

تمرين25: بين أنه مهما يكن n من. $\mathbb{N}$

$b_n=4^{2n+2}-1$ يقبل القسمة على 15

الجواب :يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}/b_n=15k$

نستعمل الاستدلال بالترجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $b_0=4^{2\times0+2}-1=4^2-1=15$

مضاعف للعدد 15 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}/4^{2n+2}-1=15k$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/4^{2(n+1)+2}-1=15k'$ ؟؟؟؟؟

أي نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/4^{2n+4}-1=15k'$ ؟؟؟؟؟

أي نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/b_{n+1}=15k'$ ؟؟؟؟؟

نحسب مثلا : $b_{n+1}-b_n=(4^{2n+4}-1)-(4^{2n+2}-1)$

$b_{n+1}-b_n=4^{2n+2+2}-4^{2n+2}=4^{2n+2}(4^2-1)$

$b_{n+1}-b_n=15\times4^{2n+1}$

اذن : $b_{n+1}-b_n=15\times4^{2n+1}$ يعني $b_{n+1}=15\times4^{2n+1}+b_n$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $\exists k\in\mathbb{N}/b_n=15k$

ومنه $b_{n+1}=15\times4^{2n+1}+15k$ اي $b_{n+1}=15\times(4^{2n+1}+k)$

وبالتالي $\exists k'\in\mathbb{N}/b_{n+1}=15k'$

تمرين26: بين أنه مهما يكن n من. $\mathbb{N}$

n^3-n يقبل القسمة على 6

الجواب :يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}/n^3-n=6k$

نستعمل الاستدلال بالترجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $0^3-0=0$ مضاعف للعدد 6 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}/n^3-n=6k$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3-(n+1)=6k'$ ؟؟؟؟؟

$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1=$

$=(n^3-n)+3n^2+3n=6k+3(n^2+n)=6k+3n(n+1)$

ونعلم أن : $n(n+1)$ عدد زوجي لأنه جداء عددين متتاليين $n(n+1)=2m$

$(n+1)^3-(n+1)=6k+3\times2m=6k+6m=6(k+m)=6k'$

وبالتالي: $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3-(n+1)=6k'$

تمرين27: 1)بين أن : $11^{n+1}-1=10\times11^n+11^n-1$ $\forall n\in\mathbb{N}$

2)بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن: 11^n-1 مضاعف للعدد 10 $\forall n\in\mathbb{N}$

الجواب :1) $11^{n+1}-1=11\times11^n-1=(10+1)\times11^n-1=10\times11^n+11^n-1$

2) يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}/11^n-1=10k$

نستعمل الاستدلال بالترجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $11^0-1=1-1=0$ مضاعف للعدد 10 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}/11^n-1=10k$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $\exists k\in\mathbb{N}/11^{n+1}-1=10k'$ ؟؟؟؟؟

نعلم حسب 1) $11^{n+1}-1=10\times11^n+11^n-1$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $\exists k\in\mathbb{N}/11^n-1=10k$

اذن: $11^{n+1}-1=10\times11^n+10k$

اذن: $11^{n+1}-1=10(11^n+k)=10k'$ مع $k'=11^n+k$

ومنه : $11^{n+1}-1$ مضاعف للعدد 10

وبالتالي: 11^n-1 مضاعف للعدد 10 $\forall n\in\mathbb{N}$

تمرين28: نضع : $A_n=3^{2n}-2^n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1) تحقق من أن : $A_{n+1}=2A_n+7\times3^{2n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

2) بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : A_n مضاعف للعدد 7 $\forall n\in\mathbb{N}^*$

الجواب :1) $A_{n+1}=3^{2(n+1)}-2^{n+1}=3^{2n+2}-2^{n+1}=3^{2n}\times3^2-2^n\times2^1$

$A_{n+1}=9\times3^{2n}-2^n\times2^1=(7+2)\times3^{2n}-2^n\times2^1=7\times3^{2n}+2\times3^{2n}-2^n\times2^1$

$A_{n+1}=7\times3^{2n}+2\times3^{2n}-2^n\times2^1=7\times3^{2n}+2(3^{2n}-2^n)=7\times3^{2n}+2\times A_n$

2) يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}^*/A_n=7k$

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $A_1=3^{2\times1}-2^1=3^2-2=9-2=7$

مضاعف للعدد 7 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}^*/A_n=7k$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}^*/A_{n+1}=7k'$ ؟؟؟؟؟

حسب السؤال1) : $A_{n+1}=7\times3^{2n}+2\times A_n$

اذن : $A_{n+1}=7\times3^{2n}+2\times A_n=7\times3^{2n}+2\times7k=7\times(3^{2n}+2k)=7\times k'$

وبالتالي : $A_n=3^{2n}-2^n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

تمرين29: ليكن a عدد حقيقي موجب قطعا

1)بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N};(1+a)^n\ge1+n\times a$

2)استنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N};\ 2^n>n$

الجواب :1) نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $(1+a)^0\ge1+0\times a$ لأن : $1\ge1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $(1+a)^n\ge1+n\times a$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $(1+a)^{n+1}\ge1+(n+1)\times a$ ؟؟؟؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $(1+a)^n\ge1+n\times a$

اذن : $(1+a)(1+a)^n\ge(1+a)(1+n\times a)$

يعني : $(1+a)^{n+1}\ge(1+a)(1+n\times a)$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نقارن : $(1+a)(1+n\times a)$ و $1+(n+1)\times a$ (يمكن حساب الفرق)

$(1+a)(1+n\times a)-(1+(n+1)\times a)=1+na+a+na^2-1-n\times a-a$

$(1+a)(1+n\times a)-(1+(n+1)\times a)=na^2\ge0$

اذن : $(1+a)(1+n\times a)\ge(1+(n+1)\times a)$

ومنه : $(1+a)^{n+1}\ge1+(n+1)\times a$

وبالتالي : $\forall n\in\mathbb{N};(1+a)^n\ge1+n\times a$

2)وجدنا : $\forall a>0;\forall n\in\mathbb{N};(1+a)^n\ge1+n\times a$

نأخذ مثلا : $a=1$ فنجد : $\forall n\in\mathbb{N};(1+1)^n\ge1+n\times1$

أي : $\forall n\in\mathbb{N};2^n\ge1+n$

ولكن نعلم أن : $\forall n\in\mathbb{N}:1+n>n$

اذن : $\forall n\in\mathbb{N};2^n>n$

الأستاذ : عثماني نجيب