السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	عموميات حول الدوال حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : حدد $(f\circ g)(x)$ و $(g\circ f)(x)$ في كل حالة مما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=2x+1 \\ g(x)=x^2-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x))=2g(x)+1 \\ &= 2(x^2-1)+1 \\ &= 2x^2-2+1 \\ &= 2x^2-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x))=(f(x))^2-1 \\ &= (2x+1)^2-1 \\ &= 4x^2+4x+1-1 \\ &= 4x^2+4x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1}{x} \\ g(x)=\dfrac{2x}{x-3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x))=\frac{g(x)+1}{g(x)} \\ &= \frac{\frac{2x}{x-3}+1}{\frac{2x}{x-3}}=\frac{\frac{2x+x-3}{x-3}}{\frac{2x}{x-3}} \\ &= \frac{3x-3}{x-3}\times\frac{x-3}{2x}=\frac{3x-3}{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x))=\frac{2f(x)}{f(x)-3} \\ &= \frac{2\frac{x+1}{x}}{\frac{x+1}{x}-3}=\frac{\frac{2x+2}{x}}{\frac{x+1-3x}{x}} \\ &= \frac{2x+2}{x}\times\frac{x}{-2x+1}=\frac{2x+2}{-2x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{1+x^2} \\ g(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x))=\sqrt{1+(g(x))^2} \\ &= \sqrt{1+\left(\frac{x^2+3}{x^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{x^4+(x^2+3)^2}{x^4}} \\ &= \sqrt{\frac{x^4+x^4+6x^2+9}{x^4}} \\ &= \frac{\sqrt{2x^4+6x^2+9}}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x))=\frac{(f(x))^2+3}{(f(x))^2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2+3}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} \\ &= \frac{1+x^2+3}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2+4}{x^2+1} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{1+x^2} \\ g(x)=\sqrt{x^2-1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x))=\sqrt{1+(g(x))^2} \\ &= \sqrt{1+x^2-1}=\sqrt{x^2}=|x| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x))=\sqrt{(f(x))^2-1} \\ &= \sqrt{1+x^2-1}=\sqrt{x^2}=|x| \end{aligned}$$

ستلاحظ من خلال الأمثلة المقدمة أنه عموما يكون $f\circ g(x)\neq g\circ f(x)$ ، لكن يمكن أن نحصل على التساوي في بعض الحالات.

تمرين 2 :

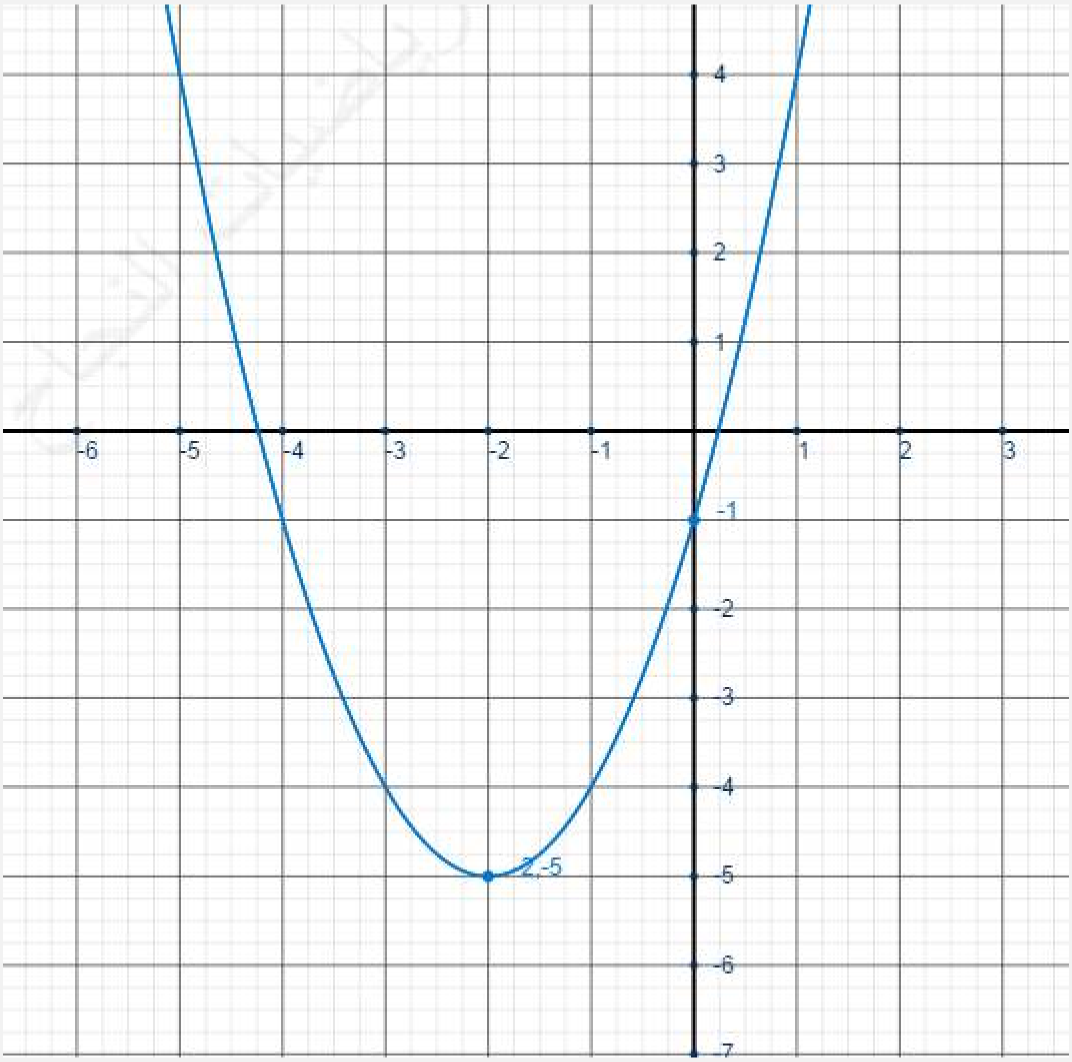
$$f(x)=x^2+4x-1$$

f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :

$$\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2}=-2$$

إذن :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-5	$\nearrow$

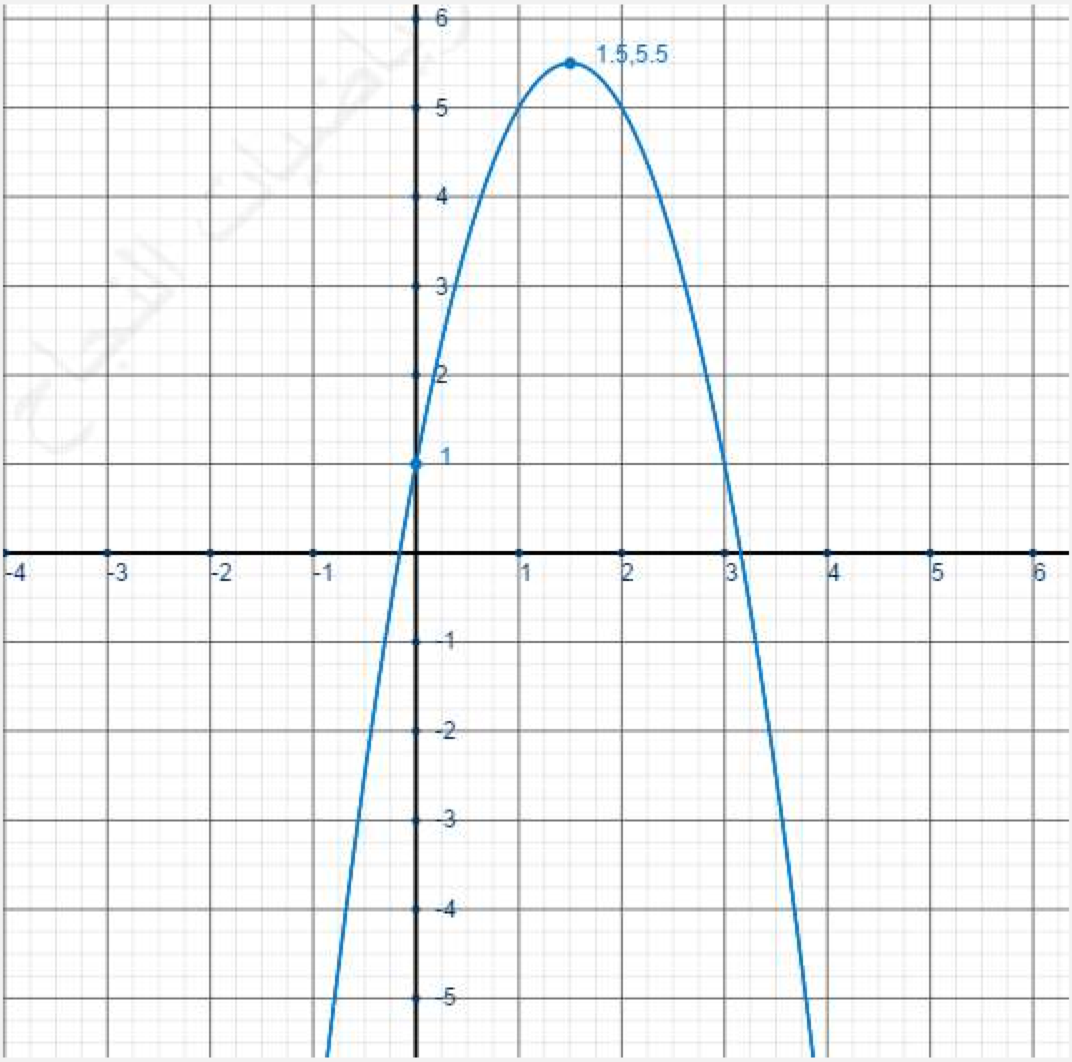


$$g(x) = -2x^2 + 6x + 1$$

g عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه : $\frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

إذن :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	↗	$\frac{11}{2}$	↘



لاحظ أن رتابة الدالة تعتمد على إشارة المعامل a

h عبارة عن دالة على شكل $\frac{ax+b}{cx+d}$ ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن هذلول:

و لدينا :

$$h(x)-3=\frac{3x-1}{x-2}-3$$

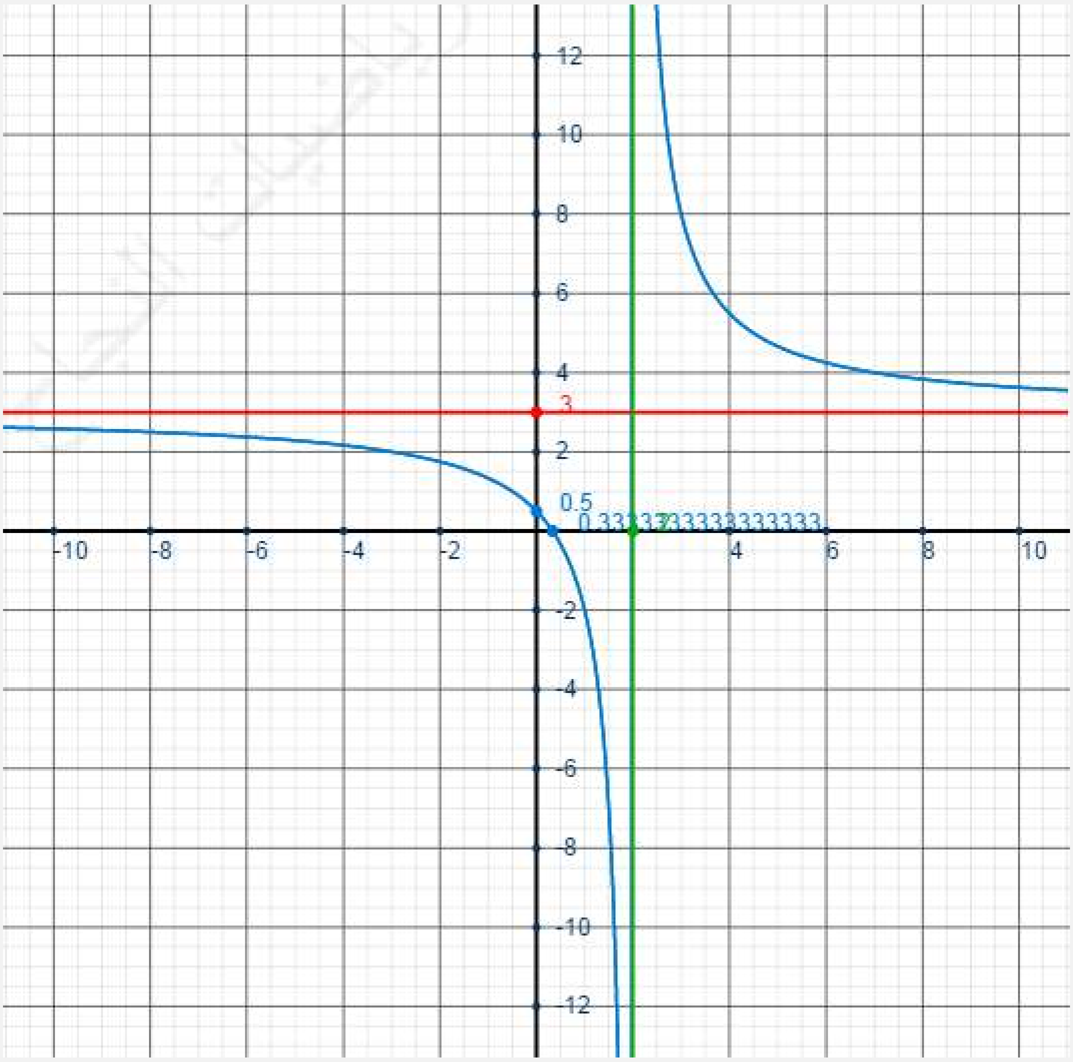
$$h(x)-3=\frac{3x-1-3x+6}{x-2}$$

$$h(x)-3=\frac{5}{x-2}$$

إذن الهذلول مركزه : $\Omega(2,3)$ و بما أن $5>0$ فالدالة تناقصية

$$\boxed{h(x)=\frac{3x-1}{x-2}}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$	||	$\searrow$



$$\boxed{k(x)=\frac{x}{x+2}}$$

k عبارة عن دالة على شكل $\frac{ax+b}{cx+d}$ ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن هذلول:

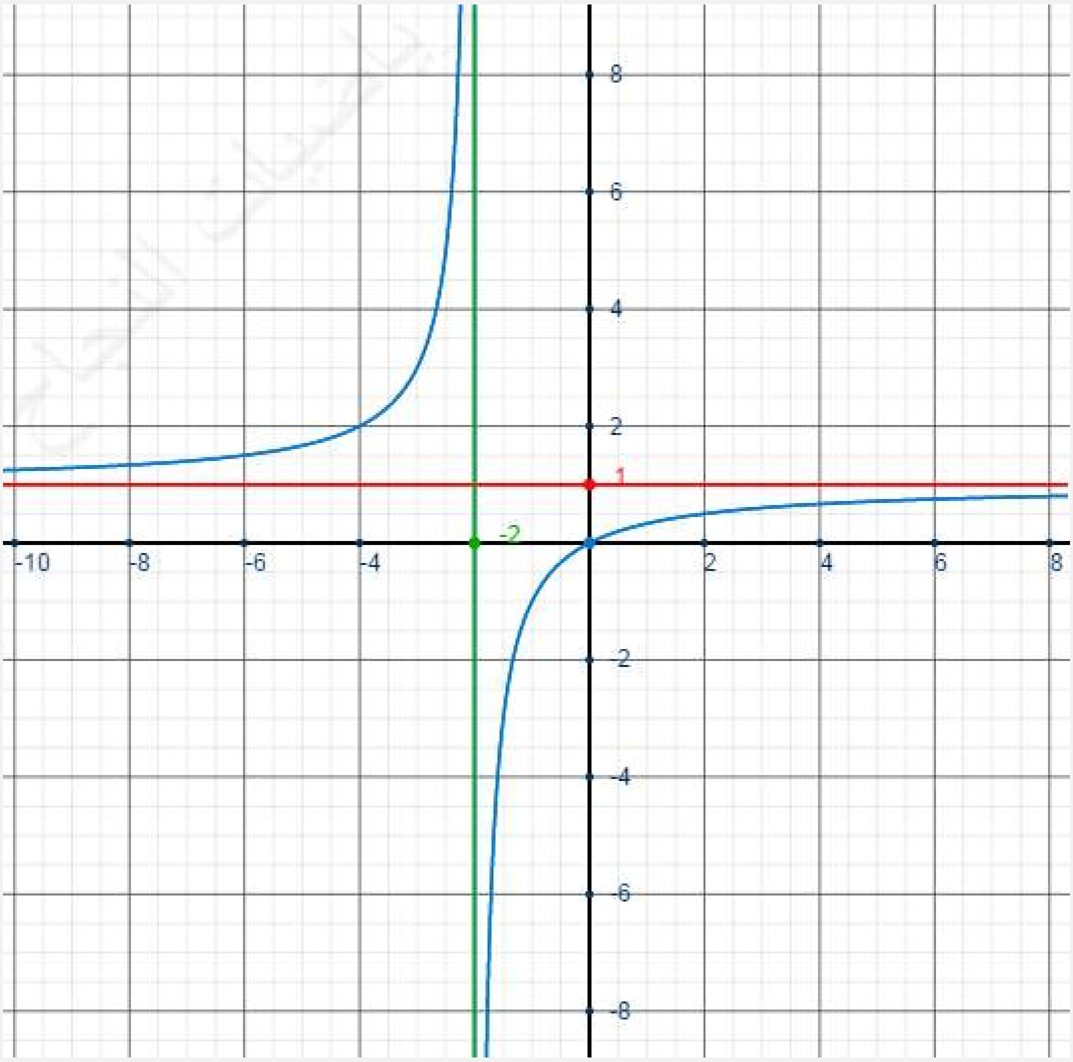
$$k(x)-1=\frac{x}{x+2}-1$$

و لدينا : $k(x)-1==\frac{x-x-2}{x+2}$

$$k(x)-1==\frac{-2}{x+2}$$

إذن الهذلول مركزه : $\Omega(-2,1)$ و بما أن $-2<0$ فالدالة تزايدية

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$k(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

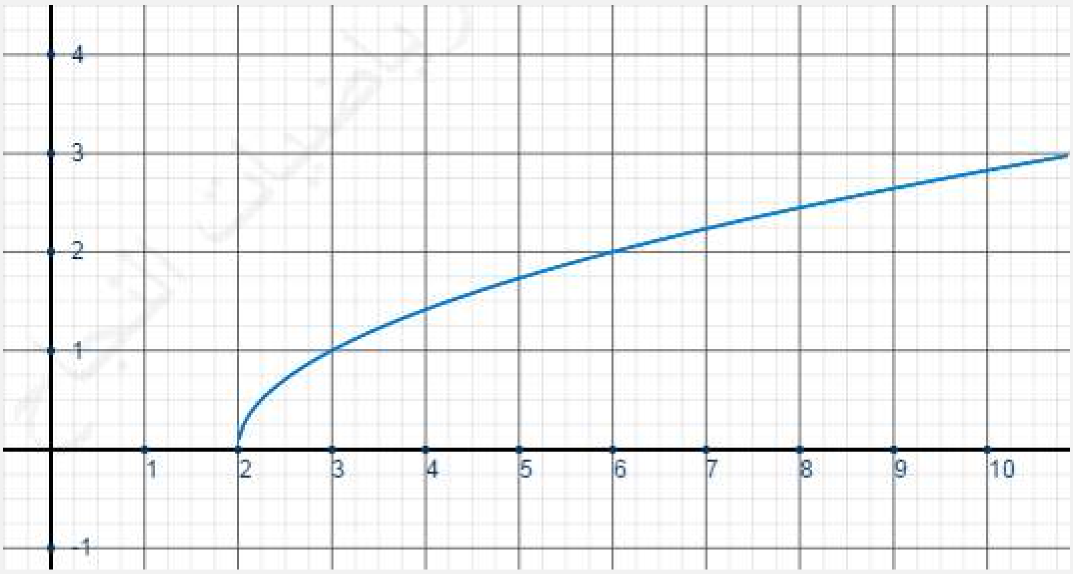


لاحظ أنه لتحديد مركز الهذلول نحسب الفرق $\frac{ax+b}{cx+d}-\frac{a}{c}$

$\boxed{p(x)=\sqrt{x-2}}$

p عبارة عن دالة على شكل $\sqrt{x+a}$، إذن :

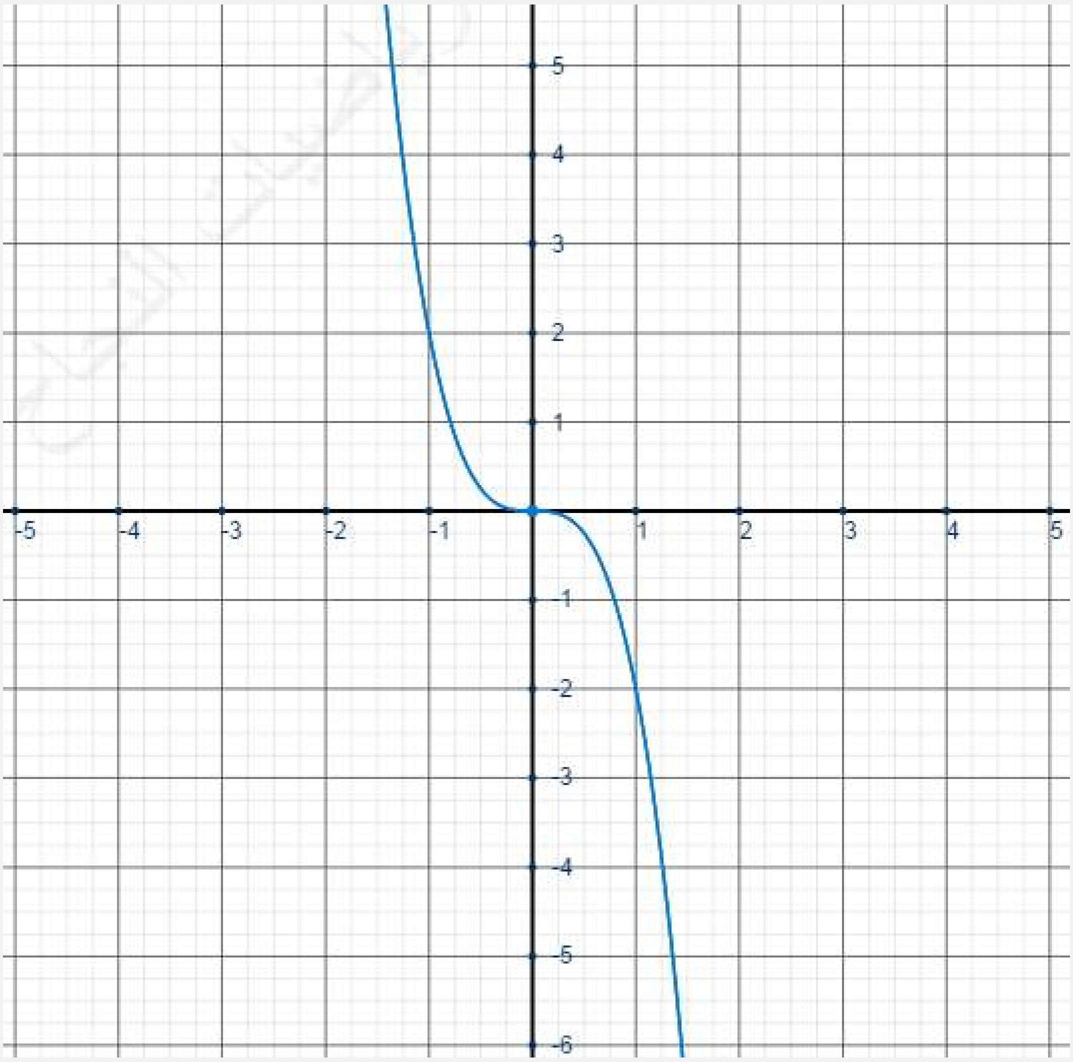
x	$-\infty$ $\qquad$ 2 $\qquad$ $+\infty$
$p(x)$	$0 \nearrow$



$\boxed{q(x)=-2x^3}$

q عبارة عن دالة على شكل $a\,x^3$ و بما أن $a=-2<0$ ، فإن :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$



تمرين 3 : أوجد $f(x)=x^2+4x+1$ و $g(x)=\sqrt{x+4}$ و $h(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

1

$Df=IR$

$Dg=\{x\in IR/\ x+4\geq 0\}=\{x\in IR/\ x\geq -4\}=[-4;+\infty[$

$Dh=\{x\in IR/\ x^2+4x+5\geq 0\}$

$\Delta=16-20=-4<0$ ، منه : $Dh=IR$

2

لنبين أن : $\forall x\in IR\quad f(x)\geq -3$

لدينا : $\forall x\in IR\quad f(x)-(-3)=x^2+4x+1+3=x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$

بالتالي : $\forall x\in IR\quad f(x)\geq -3$

3

لنبين أن : $\forall x\in IR\quad h(x)\geq 1$

لدينا : $\forall x\in IR\quad h^2(x)-1^2=x^2+4x+5-1=x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$

إذن : $\forall x\in IR\quad h^2(x)\geq 1$ و بما أن : $\forall x\in IR\quad h(x)\geq 0$ فإن : $\forall x\in IR\quad h(x)\geq 1$

4

f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :

$\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2}=-2$ ، إذن :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$g(x)$		0	$\nearrow$

g عبارة عن دالة على شكل $\sqrt{x+a}$، إذن :

5 لدينا : $\forall x\in IR \quad g\circ f(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)+4}=\sqrt{x^2+4x+1+4}=\sqrt{x^2+4x+5}=h(x)$

6

رتابة الدالة h على $]-\infty;-2]$

- لدينا f تناقصية على $]-\infty;-2]$
- لدينا $f(]-\infty;-2])=[f(-2);+\infty[=[-3;+\infty[$
- لدينا g تزايدية على $[-3;+\infty[$

إذن h تناقصية على $]-\infty;-2]$

رتابة الدالة h على $[-2;+\infty[$

- لدينا f تزايدية على $[-2;+\infty[$
- لدينا $f([-2;+\infty[)=[f(-2);+\infty[=[-3;+\infty[$
- لدينا g تزايدية على $[-3;+\infty[$

إذن h تزايدية على $[-2;+\infty[$

لتحديد رتابة المركب $p\circ q(x)$ على مجال I ، نتبع 3 مراحل:

1) ندرس رتابة $q(x)$ على I 2) نحسب J صورة I بالدالة $q(x)$ 3) ندرس رتابة الدالة $p(x)$ على المجال J

و في الأخير نحدد رتابة المركب انطلاقا من نتائج المرحلتين الأولى و الثالثة مثل قاعدة إشارة جذاء

<u>تمرين 4</u> : نضع : $f(x)=x^2-4x+3$ و $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$

1

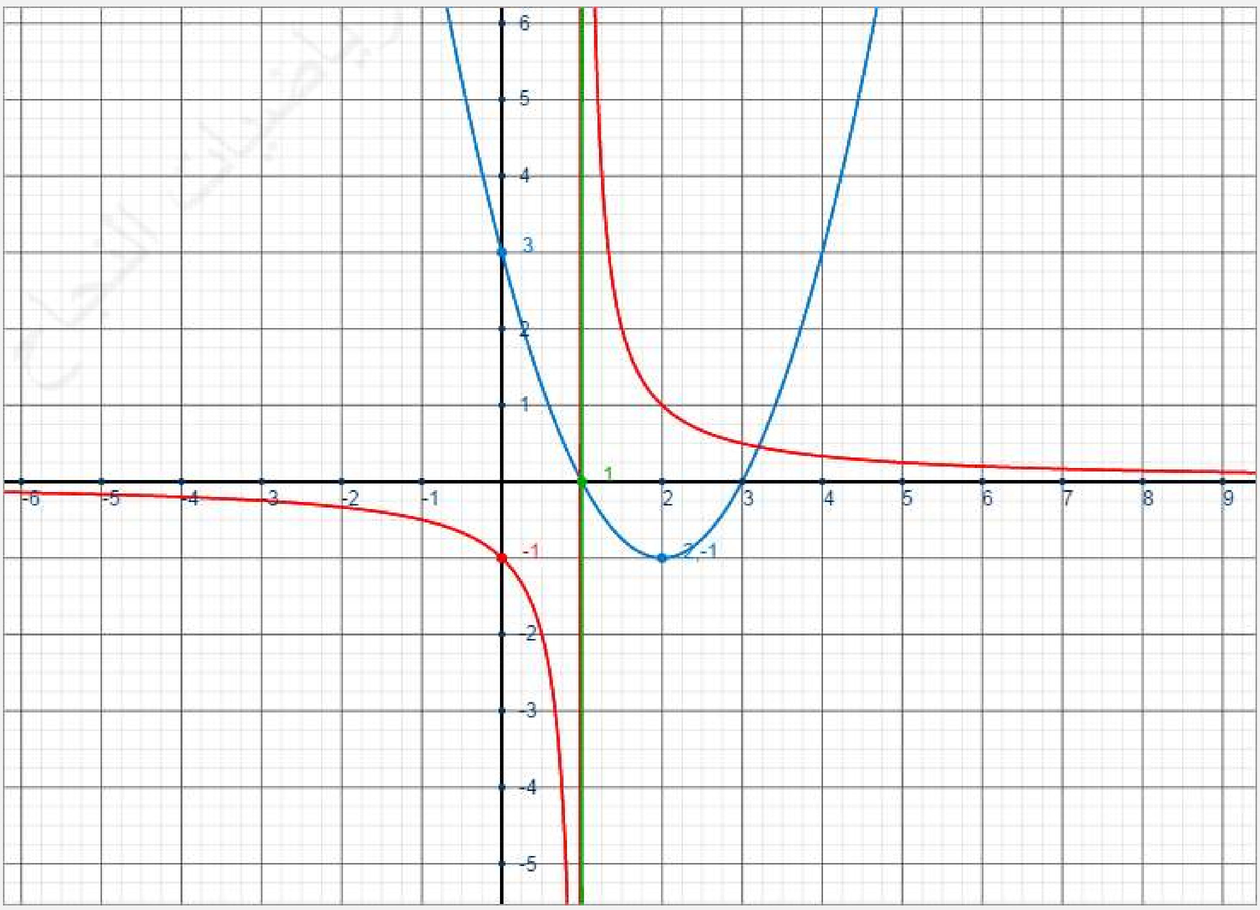
أ) f دالة حدودية من الدرجة الثانية إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم

ب) لنحدد نقطتي تقاطع Cf ومحور الأفاصيل، أي لنحل المعادلة : $f(x)=0$ أي $x^2-4x+3=0$

لدينا $\Delta=16-12=4>0$ منه : $x=\dfrac{4-2}{2}=1$ ou $x=\dfrac{4+2}{2}=3$ $x^2-4x+3=0\Rightarrow$

بالتالي : Cf يتقاطع مع محور الأفاصيل في النقطتين : $A(1;0)$ و $B(3;0)$

ج) Cf شلجم رأسه $E(1,\ f(1))$ منه :



2 Cg عبارة عن هذلول مركزه $F(1,0)$ و مقارباه هما المستقيمان : $(D_1): x=1$ و $(D_2): y=0$ (انظر الشكل السابق)

$(E):\quad x^3-5x^2+7x-4=0$

3

أ) بما أن العدد 1 ليس حلا للمعادلة (E) ($1-5+7-4=-1\neq 0$)

فإن : لكل $x\neq 1$:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-4x+3=\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow (x-1)(x^2-4x+3)=1$$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2+3x-x^2+4x-3-1=0$$

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\quad x^3-5x^2+7x-4=0$$

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\quad (E)$$

و هذا يبرهن عن التكافؤ المطلوب

ب) بما أن Cf و Cg يتقاطعان في نقطة وحيدة ، فإن المعادلة (E) تقبل حلا و حيدا

في السؤال الأخير غير مطلوب تحديد الحل أو الحلول ، فقط عدد الحلول إن وجدت.

<u>تمرين 5</u> : $f(x)=x^2-x$ ، $g(x)=\sqrt{|x|}$ ، $(\Delta):\ y=-2x+2$

1

f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ،

إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :

$$\frac{-b}{2a}=\frac{-(-1)}{2}=\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$\frac{-1}{4}$	↗

لدينا : $Dg=\{x\in IR/\ |x|\geq 0\}=IR$

و $\forall x\in IR\ \ g(-x)=\sqrt{|-x|}=\sqrt{|x|}=g(x)$

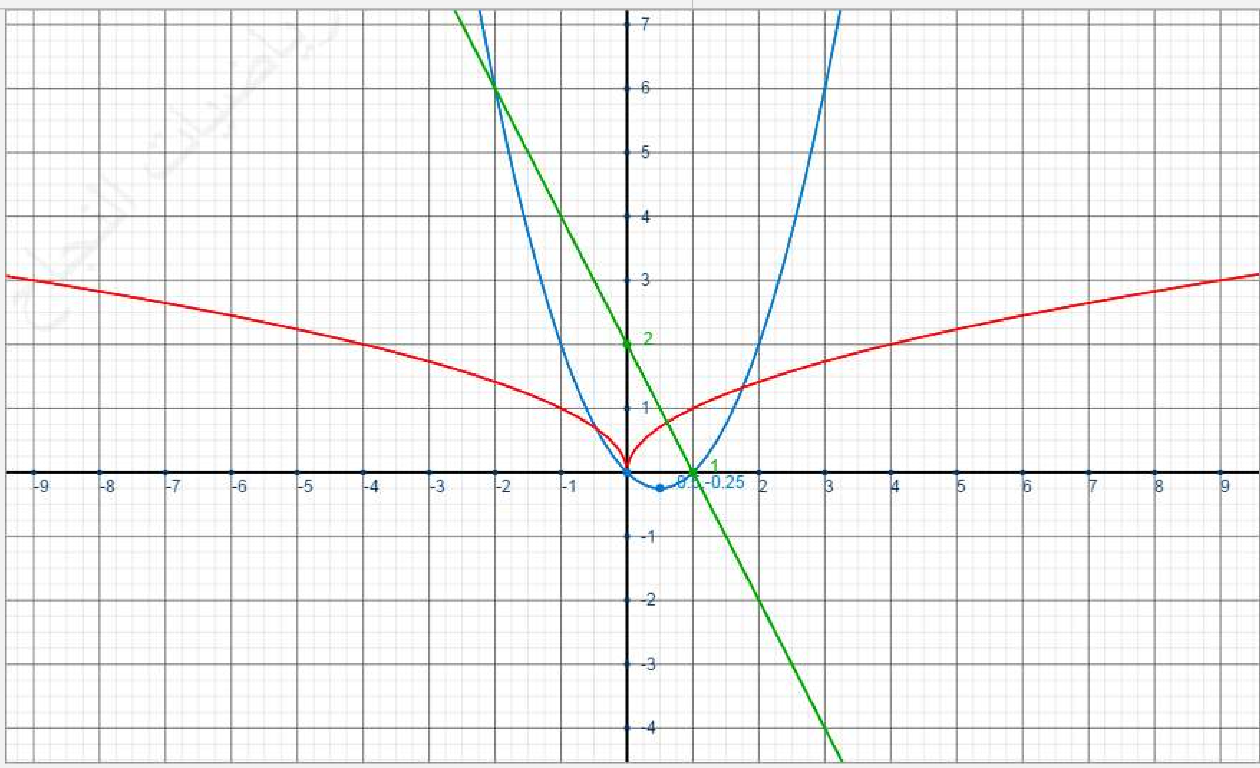
إذن : g دالة زوجية

من جهة أخرى : $\forall x\in IR^+\quad g(x)=\sqrt{x}$

إذن جدول تغيراتها هو :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	↘	0	↗

2



3

المعادلة $\sqrt{|x|}+2x=2$ تكافئ $g(x)=-2x+2$

مبيانيا نجد أن Cg و (Δ) يتقاطعان في نقطة واحدة، إذن المعادلة السابقة تقبل حلا وحيدا.

<table dir="rtl">
<tr><td>4</td><td colspan="2">لنحدد جبريا إحداثيتي نقط تقاطع (C_f) و (Δ)
من أجل ذلك نحل المعادلة: $f(x)=-2x+2$ أي: $x^2-x=-2x+2$ أي: $x^2-x+2x-2=0$
أي $x^2+x-2=0$ ، لدينا: $\Delta=1+8=9$ منه: $x=\frac{-1+3}{2}=1$ أو $x=\frac{-1-3}{2}=-2$
إذن (C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطتين: $E(1,f(1))$ و $F(-2,f(-2))$ أي: $E(1,0)$ و $F(-2,6)$</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2">مبيانيا نجد أن:
▪ حل المتراجحة $g(x)\le 3$ هو: $S=[-9;9]$
▪ حل المتراجحة $g(x)\ge 2$ هو: $S=]-\infty,-4]\cup[4,+\infty[$
▪ حل المتراجحة $-2x+2< f(x)<2$ هو: $S=(]-\infty,-2]\cup[1,+\infty[)\cap[-1,2]=[1;2]$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">6</td><td colspan="2">$g\left(\left[0;\frac{1}{4}\right[\right)=\left[0;\frac{1}{2}\right[$ و $g\left(\left[\frac{1}{4};+\infty\right[\right)=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$f([-2;1])=\left[\frac{-1}{4};6\right]$ و $f([2;+\infty[)=[2;+\infty[$ و $f(]-\infty;0])=[0;+\infty[$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">7</td><td colspan="2">لدينا: $Dh=IR^+$ و $\forall x\in IR^+\ h(x)=x-\sqrt{x}=(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}=f(\sqrt{x})=f(g(x))=f\circ g(x)$</td><td></td></tr>
<tr><td>رتابة الدالة h على $I=\left[0;\frac{1}{4}\right[$ ، لدينا:
▪ g تزايدية على I
▪ $g(I)=\left[0;\frac{1}{2}\right[$ و f تناقصية على $\left[0;\frac{1}{2}\right[$
إذن h تناقصية على $\left[0;\frac{1}{4}\right[$</td><td>رتابة الدالة h على $J=\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ ، لدينا:
▪ g تزايدية على J
▪ $g(J)=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ و f تزايدية على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$
إذن h تزايدية على $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">صعوبة السؤال تكمن في إيجاد التقسيم المناسب للمجال $[0;+\infty[$ حتى يمكن تطبيق خاصية رتابة مركب دالتين</td><td></td></tr>
</table>