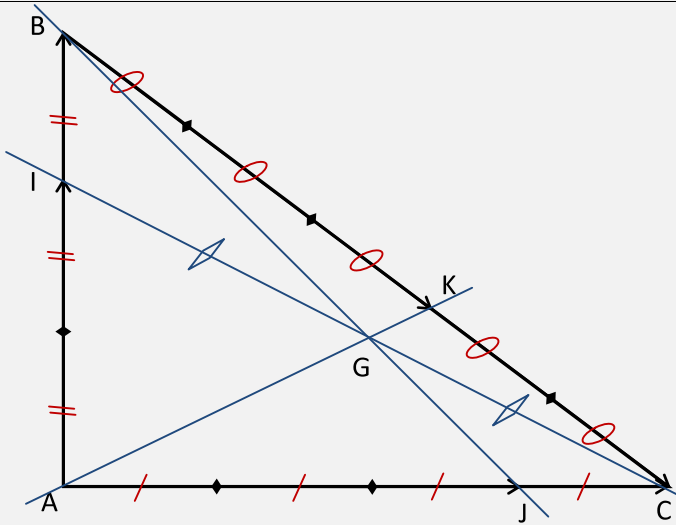


تمرين 1: $BC = 5$ و $AC = 4$ و $AB = 3$ 

لدينا I مرجح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(B,2)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M \in (P) \overrightarrow{MI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{MA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \text{ فنجد أن: } M = A$$

لدينا J مرجح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(C,3)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M \in (P) \overrightarrow{MJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{MA} + \frac{3}{4} \overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AC} \text{ فنجد أن: } M = A$$

لدينا K مرجح النقطتين المتزنتين $(B,2)$ و $(C,3)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M \in (P) \overrightarrow{MK} = \frac{2}{5} \overrightarrow{MB} + \frac{3}{5} \overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{BK} = \frac{3}{5} \overrightarrow{BC} \text{ فنجد أن: } M = A$$

لدينا G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و I مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(B,2)$

إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح النقط $(I,3)$ و $(C,3)$ أي أن G منتصف $[IC]$

لدينا G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و J مرجح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(C,3)$

إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح النقط $(B,2)$ و $(J,4)$ إذن $G \in (BJ)$

لدينا G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و K مرجح النقطتين المتزنتين $(B,2)$ و $(C,3)$

إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح النقط $(A,1)$ و $(K,5)$ إذن $G \in (AK)$

وحسب السؤال السلبق $G \in (IC)$

بالتالي: المستقيمات (CI) و (BJ) و (AK) متلاقية في G

خاصية التجميعية مفيدة في كثير من البراهين حيث تكون كافية للبرهان عن الاستقامية لأن مرجح نقطتين تكون مستقيمة مع هتين النقطتين.

تمرين 2: $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$ و $\overrightarrow{DE} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0}$

لدينا D مرجح النقطتين $(A,2)$ و $(B,1)$

لدينا E مرجح النقطتين $(D,-1)$ و $(C,3)$ منه: $-\overrightarrow{ED} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0}$

لبيّن أن النقطة C مرجح النظمة المتزنة: $\{(A,2); (B,1); (E,6)\}$ أي لبيّن أن: $2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 6\overrightarrow{CE} = \vec{0}$

لدينا E مرجح النقطتين $(D,-1)$ و $(C,3)$ منه: $\forall M \in (P) \overrightarrow{ME} = \frac{-1}{2} \overrightarrow{MD} + \frac{3}{2} \overrightarrow{MC}$

$$\text{نأخذ: } M = C \text{ فنجد أن: } \overrightarrow{CE} = \frac{-1}{2} \overrightarrow{CD} \quad (1)$$

ولدينا D مرجح النقطتين $(A,2)$ و $(B,1)$ منه: $\forall M \in (P) \overrightarrow{MD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{MA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{MB}$

$$\text{نأخذ: } M = C \text{ فنجد أن: } \overrightarrow{CD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CB} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن: $\overrightarrow{CE} = \frac{-1}{2} \left(\frac{2}{3} \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CB} \right)$ أي: $\overrightarrow{CE} = \frac{-2}{6} \overrightarrow{CA} - \frac{1}{6} \overrightarrow{CB}$ أي: $6\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$

$$2\vec{CA} + \vec{CB} + 6\vec{CE} = \vec{0} \text{ : بالتالي}$$

يمكن أيضا استعمال علاقة شال باستعمال المعطيات مباشرة ، لكن الأمر يتطلب استعمال متساويات كثيرة، لذلك استعمال الخاصية المميزة يسمح باختصار الوقت.

لدينا H مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(E,3)$ إذن حسب خاصية الصمود H مرجح النقطتين $(A,2)$ و $(E,6)$ وبما أن C مرجح $(A,2)$; $(B,1)$; $(E,6)$ فحسب خاصية التجميعية C مرجح $(H,8)$; $(B,1)$: بالتالي النقط B و C و H مستقيمية.

للبرهان على الاستقامة يمكن البرهان على أن إحدى النقط الثلاث مرجح باقي النقطتين. الشكل غير مطلوب، لذلك لم يتم رسم أي شكل

تمرين 3: O منتصف $[BC]$ ، H مرجح $\{(C,2); (B,2); (A,-1)\}$

لدينا H مرجح $(C,2)$; $(B,2)$; $(A,-1)$ إذن $\forall M \in (P) \vec{MH} = \frac{-1}{3}\vec{MA} + \frac{2}{3}\vec{MB} + \frac{2}{3}\vec{MC}$
 نأخذ: $M = O$ فنجد أن: $\vec{OH} = \frac{-1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OB} + \frac{2}{3}\vec{OC}$ منه $\vec{OH} = \frac{-1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}(\vec{OB} + \vec{OC}) = \frac{-1}{3}\vec{OA} + \frac{4}{3}\vec{OC}$
 (لأن $\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ لكون O منتصف $[BC]$) ، بالتالي $\vec{OH} = \frac{-1}{3}\vec{OA}$

لم يتم رسم الشكل لكونه لا يتضمن الجديد

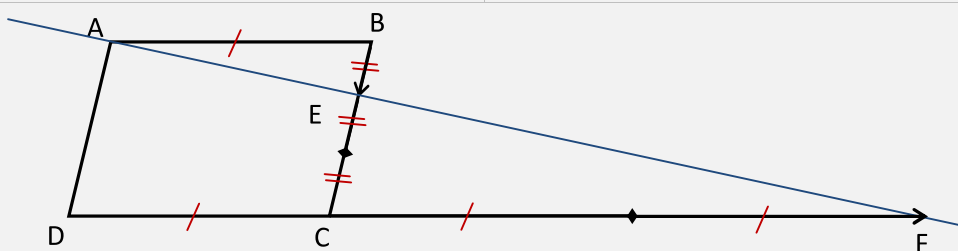
لنبين أن النقطة O منتصف القطعة $[HG]$ أي نبين أن: $\vec{OH} + \vec{OG} = \vec{0}$
 لدينا G مركز ثقل المثلث ABC إذن G مرجح $(A,1)$; $(B,1)$; $(C,1)$

إذن: $\forall M \in (P) \vec{MG} = \frac{1}{3}\vec{MA} + \frac{1}{3}\vec{MB} + \frac{1}{3}\vec{MC}$ نأخذ: $M = O$ نجد:
 $\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}(\vec{OB} + \vec{OC}) = \frac{1}{3}\vec{OA}$
 بالتالي: $\vec{OH} + \vec{OG} = \frac{-1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OA} = \vec{0}$

تمرين 4: $ABCD$ متوازي أضلاع. E مرجح $(C,1)$ ، F مرجح $(C,3)$ و $(D,-2)$

لدينا E مرجح النقطتين المتزنتين $(C,1)$ و $(B,2)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:
 $\forall M \in (P) \vec{ME} = \frac{1}{3}\vec{MC} + \frac{2}{3}\vec{MB}$
 نأخذ: $M = B$ فنجد أن: $\vec{BE} = \frac{1}{3}\vec{BC}$

لدينا F مرجح النقطتين المتزنتين $(C,3)$ و $(D,-2)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:
 $\forall M \in (P) \vec{MF} = \frac{3}{1}\vec{MC} + \frac{-2}{1}\vec{MD}$
 نأخذ: $M = D$ فنجد أن: $\vec{DF} = 3\vec{DC}$



لنبين أن A مرجح النقطتين المتزنتين $(E,3)$ و $(F,-1)$ أي نبين: $3\vec{AE} - \vec{AF} = \vec{0}$
 لدينا: $3\vec{AE} - \vec{AF} = 3(\vec{AB} + \vec{BE}) - (\vec{AD} + \vec{DF}) = 3\vec{AB} + 3\vec{BE} - \vec{AD} - \vec{DF} = 3\vec{DC} + 3 \times \frac{1}{3}\vec{BC} - \vec{BC} - 3\vec{DC} = \vec{0}$
 بالتالي A مرجح النقطتين المتزنتين $(E,3)$ و $(F,-1)$

نستنتج أن النقط A و E و F مستقيمية.

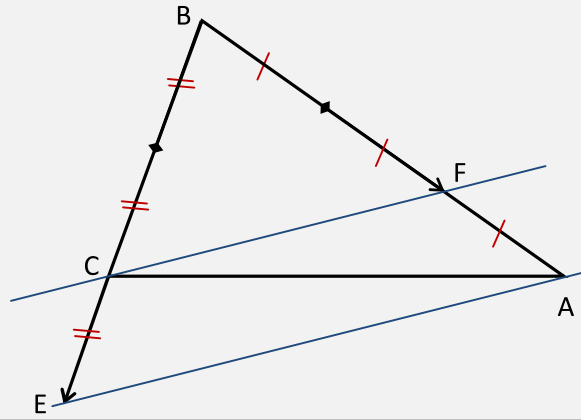
تمرين 5: ABC مثلث. E مرجح $(C,-3)$ و $(B,1)$ و F مرجح $(A,2)$ و $(B,1)$

لدينا E مرجح النقطتين المتزنتين $(C,-3)$ و $(B,1)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:
 $\forall M \in (P) \vec{ME} = \frac{-3}{-2}\vec{MC} + \frac{1}{-2}\vec{MB}$

لدينا F مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:
 $\forall M \in (P) \vec{MF} = \frac{2}{3}\vec{MA} + \frac{1}{3}\vec{MB}$

نأخذ: $M = B$ فنجد أن: $\vec{BF} = \frac{2}{3}\vec{BA}$

نأخذ: $M = B$ فنجد أن: $\vec{BE} = \frac{3}{2}\vec{BC}$



لدينا: $\vec{BF} = \frac{2}{3}\vec{BA}$ منه $\vec{BA} = \frac{3}{2}\vec{BF}$ منه $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE} = \frac{3}{2}\vec{FB} + \frac{3}{2}\vec{BC} = \frac{1}{3}(\vec{FB} + \vec{BC}) = \frac{1}{3}\vec{FC}$: منه $(CF) \parallel (AE)$ بالتالي

2