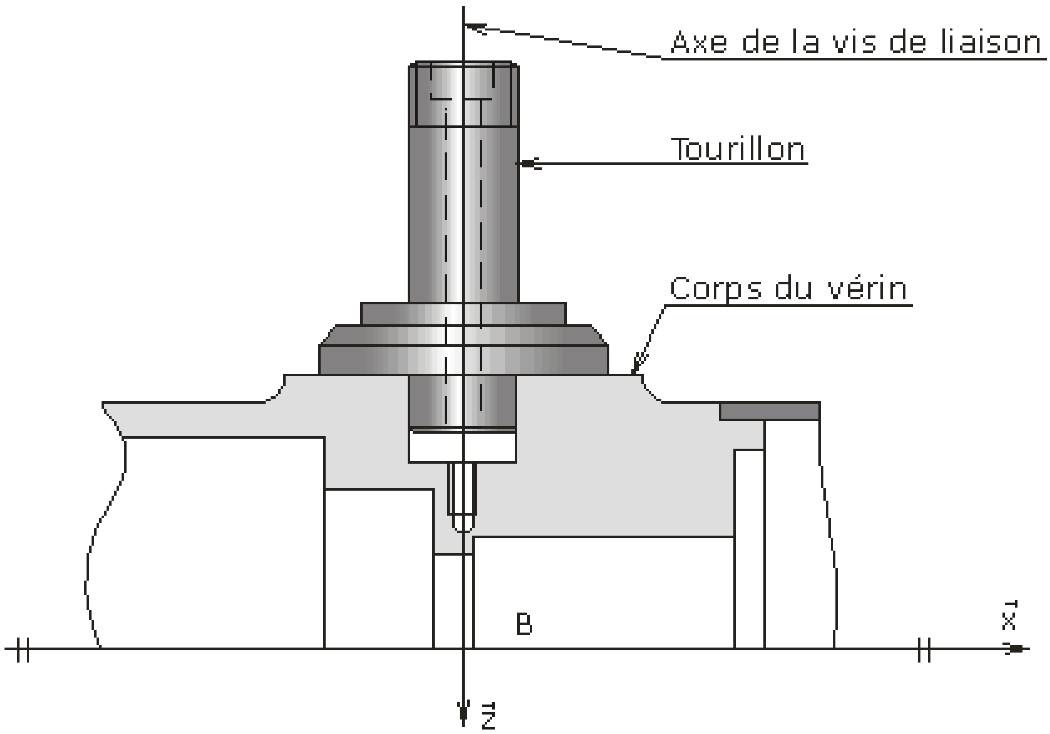
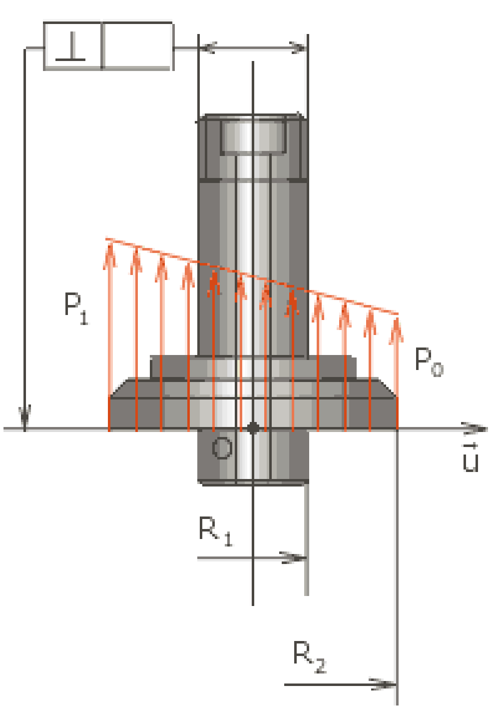
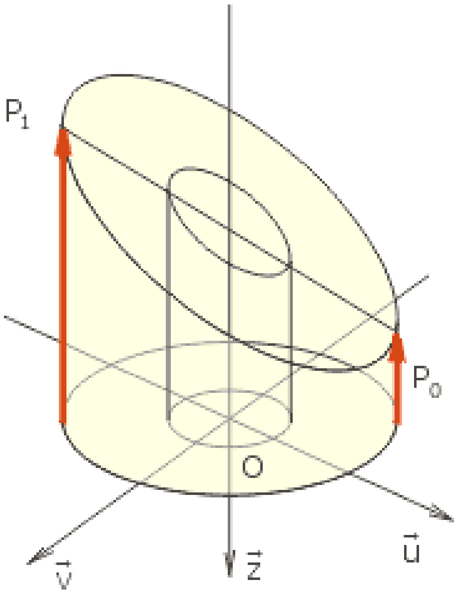
Enoncé *D'après un sujet d'agrégation Mécanique*

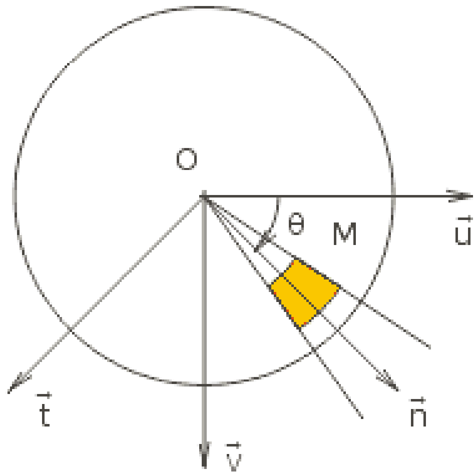
Considérons une liaison pivot réalisée par deux tourillons , disposés symétriquement par rapport au plan $(B,\vec{x},\vec{y})$. Ces deux tourillons sont mis en position par rapport à un corps de vérin par centrage court et appui plan. Leur maintient en position est assuré par deux vis disposées suivant l'axe $(B,\vec{z})$.



On suppose que les actions transmissibles entre le corps du vérin et les tourillons sont réparties uniquement que sur les faces des contacts plans. Du fait du défaut de perpendicularité entre l'axe de chaque tourillon et le plan d'appui avec le vérin, il existera une répartition non constante de pression. On propose la répartition de pression de la figure jointe







1 Déterminer l'expression de la fonction de répartition surfacique de charge $P(\theta,\ \rho)$

2 Déterminer en O le torseur résultant des actions réparties du vérin sur le tourillon .

3 Déterminer la position du point de contact entre le vérin et le tourillon où le torseur résultant des actions de contact est équivalent à un glisseur.

Solution

1 D'après la répartition de charge proposée, nous pouvons écrire en utilisant les coordonnées cartésiennes du repère $(O,\vec{u},\vec{v})$: $\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial P(u,v)}{\partial u}=0 \\ \dfrac{\partial P(u,v)}{\partial v}=\dfrac{P_0-P_1}{2.R_2} \end{array}\right.$ On déduit donc que : $\dfrac{dP(u,v)}{dv}=\dfrac{P_0-P_1}{2.R_2}$ et par intégration :

$P(u,v)=\dfrac{P_0-P_1}{2.R_2}.u+\dfrac{P_1+P_0}{2}$. En utilisant à présent les coordonnées polaires $\theta,\ \rho$, nous déduisons l'expression de la répartition de charge: $\boxed{P(\theta,\rho)=\frac{P_0-P_1}{2.R_2}.\rho.\cos\theta+\frac{P_1+P_0}{2}}$ Pour $\left|\begin{array}{l} R_1\le\rho\le R_2 \\ 0\le\theta\le 2.\pi\end{array}\right.$

2 En un point M appartenant au plan de contact entre les deux surfaces , tel que $\overrightarrow{OM}=\rho.\vec{u}$, nous pouvons caractériser l'action du vérin sur le tourillon par un élément de torseur :

$$_M\{dT_{Vérin\to Tourillon}\}=\left\{\begin{matrix}-P(\theta,\rho).dS.\vec{z}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_M=\left\{\begin{matrix}-P(\theta,\rho).\rho.d\rho.d\theta.\vec{z}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_M$$

$$_O\{dT_{Vérin\to Tourillon}\}=_O\left\{\begin{matrix}-P(\theta,\rho).\rho.d\rho.d\theta.\vec{z}\\ \underbrace{\overrightarrow{OM}}_{\rho.\vec{u}}\wedge -P(\theta,\rho).\rho.d\rho.d\theta.\vec{z}\end{matrix}\right\}=_O\left\{\begin{matrix}-P(\theta,\rho).\rho.d\rho.d\theta.\vec{z}\\ P(\theta,\rho).\rho^2.d\rho.d\theta.\vec{t}\end{matrix}\right\}$$

$$_O\{T_{Vérin\to Tourillon}\}=_O\left\{\begin{matrix}\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2.\pi}-P(\theta,\rho).\rho.d\theta.d\rho.\vec{z}\\ \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2.\pi}P(\theta,\rho).\rho^2.d\theta.d\rho.\vec{t}\end{matrix}\right\}$$

$$=_O\left\{\begin{matrix}\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2.\pi}-\left(\frac{P_0-P_1}{2.R_2}.\rho.\cos\theta+\frac{P_1+P_0}{2}\right).\rho.d\theta.d\rho.\vec{z}\\ \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2.\pi}\left(\frac{P_0-P_1}{2.R_2}.\rho.\cos\theta+\frac{P_1+P_0}{2}\right).\rho^2.d\theta.d\rho.\vec{t}\end{matrix}\right\}$$

$$_O\{T_{Vérin\to Tourillon}\}=_O\left\{\begin{matrix}-\int_{R_1}^{R_2}\left[\frac{P_1+P_0}{2}.\rho.\theta\right]_0^{2\pi}d\rho\vec{z}\\ \int_{R_1}^{R_2}\left(\int_0^{2.\pi}\frac{P_0-P_1}{2.R_2}.\rho^3.\cos\theta\vec{t}.d\theta+\underbrace{\int_0^{2.\pi}\frac{P_1+P_0}{2}.\rho^2\vec{t}.d\theta}_{\vec{0}}\right).d\rho\end{matrix}\right\}$$

$$_O\{T_{Vérin\to Tourillon}\}=_O\left\{\begin{matrix}-\pi.\frac{P_1+P_0}{2}.\left(R_2{}^2-R_1{}^2\right).\vec{z}\\ \frac{P_0-P_1}{2.R_2}.\int_{R_1}^{R_2}\rho^3.\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\vec{t}.d\theta\right).d\rho\end{matrix}\right\}$$

$$ {}_O\left\{T_{Vérin\to Tourillon}\right\} = {}_O\left\{ \begin{array}{c} -\pi.\dfrac{P_1+P_0}{2}.\left(R_2^{\,2}-R_1^{\,2}\right).\vec{z} \\ \dfrac{P_0-P_1}{2.R_2}.\displaystyle\int_{R_1}^{R_2}\rho^3.\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta.\vec{t}.d\theta\right).d\rho \end{array}\right\} $$

$$ = {}_O\left\{ \begin{array}{c} -\pi.\dfrac{P_1+P_0}{2}.\left(R_2^{\,2}-R_1^{\,2}\right).\vec{z} \\ \dfrac{P_0-P_1}{2.R_2}.\left(\dfrac{R_2^{\,4}-R_1^{\,4}}{4}\right).\displaystyle\int_0^{2.\pi}\cos\theta.\vec{t}.d\theta \end{array}\right\} $$

Avec $\vec{t} = \cos\theta.\vec{v} - \sin\theta.\vec{u}$, nous obtenons :

$$ {}_O\left\{T_{Vérin\to Tourillon}\right\} = {}_O\left\{ \begin{array}{c} -\pi.\dfrac{P_1+P_0}{2}.\left(R_2^{\,2}-R_1^{\,2}\right).\vec{z} \\ \dfrac{P_0-P_1}{2.R_2}.\left(\dfrac{R_2^{\,4}-R_1^{\,4}}{4}\right).\left(\dfrac{1}{2}.\left[\left(\theta+\dfrac{\sin 2.\theta}{2}\right).\vec{v}\right]_0^{2.\pi}+\left[\cos^2\theta.\vec{u}\right]_0^{2\pi}\right) \end{array}\right\} $$

$$ \boxed{ {}_O\left\{T_{Vérin\to Tourillon}\right\} = {}_O\left\{ \begin{array}{c} -\pi.\dfrac{P_1+P_0}{2}.\left(R_2^{\,2}-R_1^{\,2}\right).\vec{z} \\ \pi.\dfrac{P_0-P_1}{2.R_2}.\left(\dfrac{R_2^{\,4}-R_1^{\,4}}{4}\right).\vec{v} \end{array}\right\} = {}_O\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{Vérin\to Tourillon} \\ \vec{M}_{O\ Vérin\to Tourillon} \end{array}\right\} } $$

3 Le comoment du torseur déduit à la question précédente étant nul et la résultante non nulle, ce torseur est donc un glisseur. La position de son axe central est donné par :

$$ \overrightarrow{OI} = \frac{\vec{R}_{V\to T}\wedge\vec{M}_{O\,V\to T}}{\left\|\vec{R}_{V\to T}\right\|^2} = \frac{-\pi.\dfrac{P_1+P_0}{2}.\left(R_2^{\,2}-R_1^{\,2}\right).\vec{z}\wedge\pi.\dfrac{P_0-P_1}{2.R_2}.\left(\dfrac{R_2^{\,4}-R_1^{\,4}}{4}\right).\vec{v}}{\left(\pi.\dfrac{P_1+P_0}{2}.\left(R_2^{\,2}-R_1^{\,2}\right)\right)^2} $$

On déduit donc l'axe suivant lequel le torseur équivalent à cette répartition de charge est un glisseur : c'est l'axe $(I,\vec{z})$. Le point I étant le point d'intersection de cet axe avec le plan de contact entre le corps de vérin et le tourillon. On a donc :

$$ \boxed{ \overrightarrow{OI} = \frac{P_1-P_0}{P_1+P_0}.\frac{\left(R_2^{\,2}+R_1^{\,2}\right)}{4}\,\vec{u} } $$

En ce point, le torseur résultant s'écrira :

$$ {}_{I}\left\{T_{Vérin \to Tourillon}\right\} = {}_{I}\left\{\begin{matrix} -\pi.\dfrac{P_1 + P_0}{2}.\left(R_2{}^2 - R_1{}^2\right).\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\} = {}_{I}\left\{\begin{matrix} \vec{R}_{Vérin \to Tourillon} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\} $$