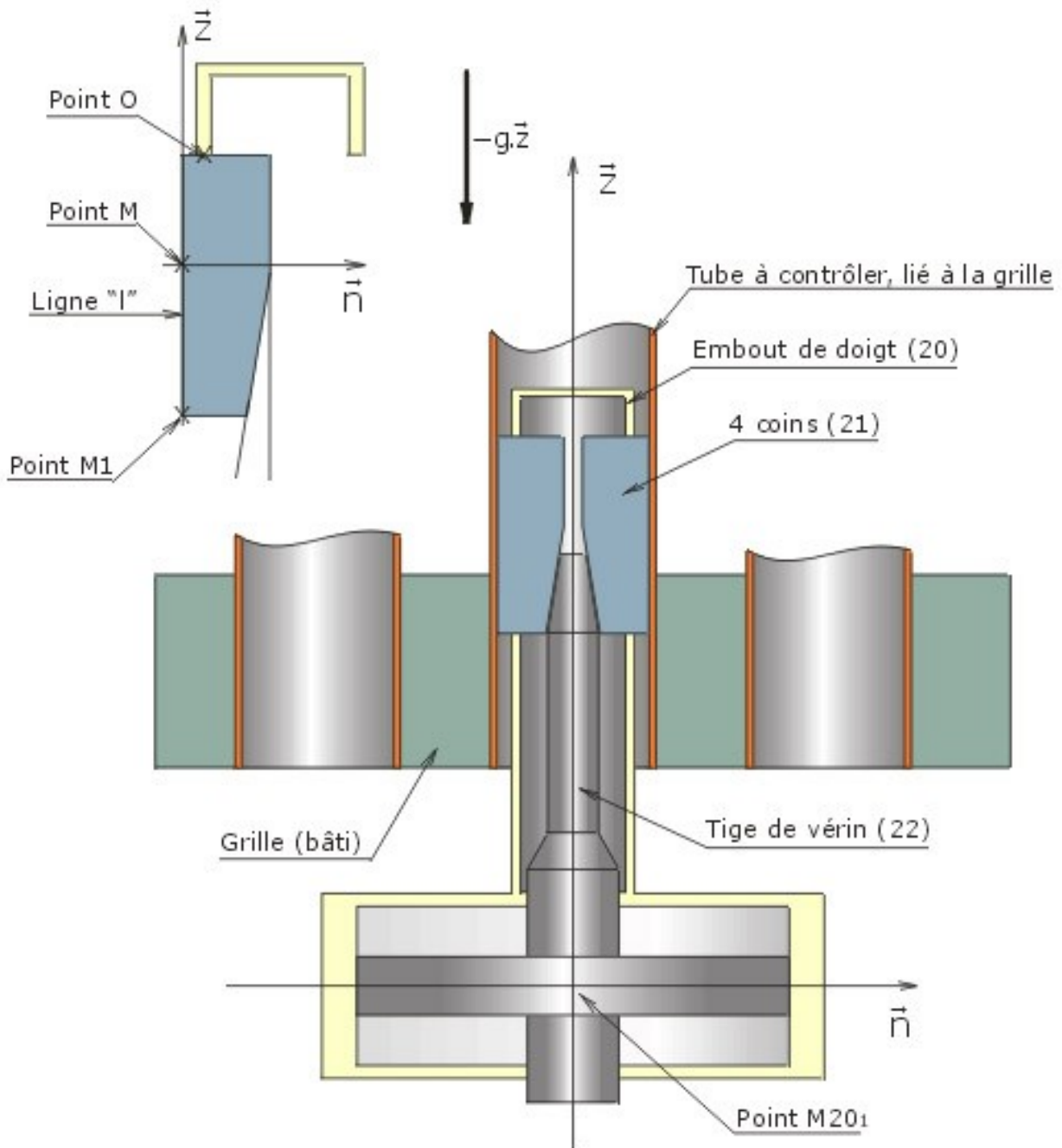


Le générateur de vapeur d'une centrale nucléaire à eau chaude est un point sensible en terme de contamination radioactive. L'eau pressurisée venant du réacteur est introduite dans un échangeur thermique constitué d'un ensemble de tubes disposés parallèlement les uns par rapport aux autres dans lesquels cette eau circule et chauffe par échange thermique l'eau du circuit secondaire. L'eau du secondaire se vaporise et est ensuite canalisée jusqu'à une turbine liée à un alternateur qui est entraînée par détente de la vapeur. L'eau du circuit primaire, contaminée lors de son séjour dans le réacteur, ne doit pas se trouver en contact du circuit d'eau secondaire.

Le contrôle des tubes revêt alors une grande importance. On utilise à cet effet un robot (Le bras BETA) qui vérifie l'étanchéité des tubes à l'aide d'un capteur (à courants de Foucault) déplacé dans chaque tube par le bras BETA.

Ce bras se cramponne au moyen de quatre doigts situés sur une tourelle dans quatre tubes et se plaque en 'plafond' contre la grille située à l'extrémité des tubes.

On s'intéresse dans cet exercice à l'action de ces doigts. La liaison entre un doigt et le tube à contrôler est réalisée par adhérence entre quatre coins disposés à 90° les uns par rapport aux autres et le tube à contrôler. Les doigts sont plaqués contre le tube par l'intermédiaire d'un vérin disposant à l'extrémité de sa tige d'un cône d'angle au sommet $2\alpha = 20^\circ$.



1 Etude des liaisons Tubes /Coins

1.1 Les contacts entre le tube et les quatre coins s'effectuent sur de petites surfaces cylindriques et sont modélisés par des contacts linéaires rectilignes (ligne l) parallèles à l'axe $(M20_1, \vec{z})$. Sachant que le seul mouvement envisageable entre les coins et le tube est un mouvement de translation suivant la direction \vec{z} , supprimé par adhérence, écrire à la limite du glissement en un point de contact M courant de la ligne de contact, le torseur élémentaire des actions mécaniques transmissibles : $M \left\{ dT_{tube \rightarrow coin} \right\}$. On note

$p(z)$ en N/mm la répartition linéique normale de charge en un point quelconque M de la ligne de contact et f le coefficient de frottement ($f = 0,1$) entre un coin et le tube.

1.2 On admet que la répartition normale de charge est constante sur la ligne de contact :

$p(z) = p = cte$. Montrer que le torseur résultant d'action $\left\{ T_{tube \rightarrow coin} \right\}$ est un glisseur en un point M_0 qui sera à préciser. Exprimer les éléments de réduction de ce torseur en M_0 en fonction de p , f le coefficient de frottement ($f = 0,1$), et la longueur de la ligne de contact : l .

1.3 On admet que les quatre coins (21) ont le même comportement mécanique. Montrer que les actions du tube sur le doigt au travers des quatre lignes "1" est un glisseur d'axe central (M_{20_1}, \vec{z}) . Préciser la forme de la résultante de ce torseur en fonction des paramètres p , f et l

1.4 Le bras BETA est contraint par son cahier des charges à tenir en position si seulement deux des quatre doigts fonctionnent correctement. En supposant que ces deux doigts ont le même comportement, calculer la longueur minimale l_{min} pour que l'ensemble BETA reste en équilibre l'action de son poids total et que la pression normale de contact reste inférieure à $p_{max} = 100 N/mm^2$. La masse totale du bras sera notée M_t avec $M_t = 65 Kg$.

2 Etude d'un doigt

Le contact embout de doigt (20), coin (21) est modélisé par une liaison sphère/plan parfaite au point Q. Le contact entre le tige de vérin (22) et un coin (21) est modélisé par une liaison parfaite dont le torseur des actions mécaniques transmissibles en un point M quelconque est de la forme :

$${}_M \left\{ T_{(22) \rightarrow (21)} \right\} = \begin{Bmatrix} Y \cdot \vec{n} - Y \cdot \tan \alpha \cdot \vec{z} \\ N_M \cdot \vec{t} \end{Bmatrix}$$

2.1 Déterminer à la limite du glissement l'expression de Y en fonction de la masse totale M_t et de f .

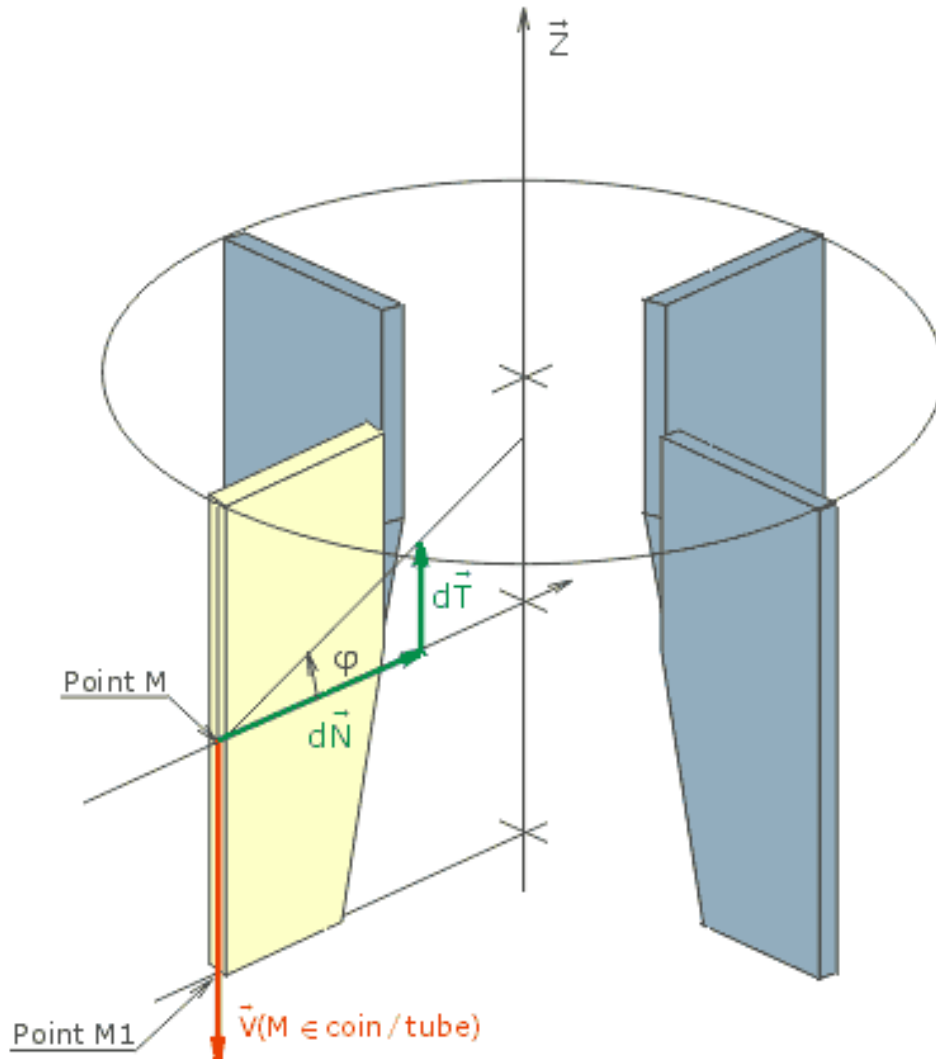
2.2 Faire un bilan détaillé des actions externes à la tige (22) du vérin.

2.3 Déterminer la section utile du piston lié à la tige (22) du vérin de doigt. La pression d'alimentation du vérin est $q = 8 bars$, la masse de l'ensemble piston et tige est négligeable et la liaison pivot glissant avec le corps de vérin est supposée être parfaite.



1.1 Le torseur élémentaire en un point de contact M sera :

$${}_M \left\{ dT_{tube \rightarrow coin} \right\} = {}_M \left\{ \begin{matrix} d\vec{f}_{tube \rightarrow coin} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} = {}_M \left\{ \begin{matrix} d\vec{N} + d\vec{T} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} = {}_M \left\{ \begin{matrix} p(z) \cdot (\vec{n} + f \vec{z}) \cdot dz \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} \quad \text{avec } f = \tan \varphi$$



Du fait des actions de gravitation, la vitesse de glissement au point de contact M entre un coin et le tube sera orientée par \vec{z} : $\vec{V}(M \in coin / tube) = - \|\vec{V}(M \in coin / tube)\| \vec{z}$. La composante tangentielle d'action de contact du tube sur le coin s'opposera donc à cette vitesse. A la limite du glissement, le rapport

entre la composante tangentielle et la composante normale est : $\frac{\|d\vec{T}\|}{\|d\vec{N}\|} = \tan \varphi = f$.

1.2 En considérant que la répartition linéique normale de charge est constante, nous avons, en utilisant le résultat de la question 1-1 :

$${}_M \left\{ dT_{tube \rightarrow coin} \right\} = {}_M \left\{ \begin{matrix} d\vec{f}_{tube \rightarrow coin} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} = {}_M \left\{ \begin{matrix} p \cdot (\vec{n} + f \vec{z}) \cdot dz \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}$$

Déterminons le torseur résultant de ces actions réparties en M_1 :

$$M_1 \left\{ dT_{tube \rightarrow coin} \right\} = \left\{ d\vec{M}_{M_1, tube \rightarrow coin} = \overrightarrow{M_1 M} \wedge d\vec{f}_{tube \rightarrow coin} \right\} = M_1 \left\{ \begin{array}{l} p.(\vec{n} + f\vec{z}).dz \\ z.\vec{z} \wedge p.(\vec{n} + f\vec{z}).dz \end{array} \right\}$$

$$M_1 \left\{ T_{tube \rightarrow coin} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\ell} p.(\vec{n} + f\vec{z}).dz \\ \int_0^{\ell} z.\vec{z} \wedge p.(\vec{n} + f\vec{z}).dz \end{array} \right\} = M_1 \left\{ \begin{array}{l} p.(\vec{n} + f\vec{z}).\ell \\ \frac{\ell^2}{2}.p.(\vec{z} \wedge \vec{n}) \end{array} \right\}$$

Déterminons à présent la position de l'axe central de ce torseur . Soit M_0 un point de l'axe central . Nous pouvons alors écrire :

$$\vec{M}_{M_0, tube \rightarrow coin} = \vec{M}_{M_1, tube \rightarrow coin} + \overrightarrow{M_0 M_1} \wedge \vec{f}_{tube \rightarrow coin}$$

Si l'axe central passe par M_0 , on peut écrire :

$$\vec{M}_{M_0, tube \rightarrow coin} = k. \vec{f}_{tube \rightarrow coin}$$

Il vient :

$$k. \vec{f}_{tube \rightarrow coin} = \vec{M}_{M_1, tube \rightarrow coin} + \overrightarrow{M_0 M_1} \wedge \vec{f}_{tube \rightarrow coin}$$

$$(k. \vec{f}_{tube \rightarrow coin}). \vec{f}_{tube \rightarrow coin} = \left(\vec{M}_{M_1, tube \rightarrow coin} + \overrightarrow{M_0 M_1} \wedge \vec{f}_{tube \rightarrow coin} \right). \vec{f}_{tube \rightarrow coin}$$

$$k. \left\| \vec{f}_{tube \rightarrow coin} \right\|^2 = \underbrace{\vec{M}_{M_1, tube \rightarrow coin} \cdot \vec{f}_{tube \rightarrow coin}}_0$$

Ce qui entraîne donc que $k = 0$ et donc $\vec{M}_{M_0, tube \rightarrow coin} = \vec{0}$

Soit M_0 un point de l'axe central tel que $\overrightarrow{M_1 M_0} = \lambda.\vec{z}$ et $\vec{M}_{M_0, tube \rightarrow coin} = \vec{0}$. On peut alors écrire :

$$\vec{M}_{M_1, tube \rightarrow coin} = \vec{M}_{M_0, tube \rightarrow coin} + \overrightarrow{M_1 M_0} \wedge \vec{f}_{tube \rightarrow coin}$$

$$\frac{\ell^2}{2}.p.(\vec{z} \wedge \vec{n}) = \lambda.\vec{z} \wedge p.(\vec{n} + f\vec{z}).\ell = \lambda.p.(\vec{z} \wedge \vec{n}).\ell$$

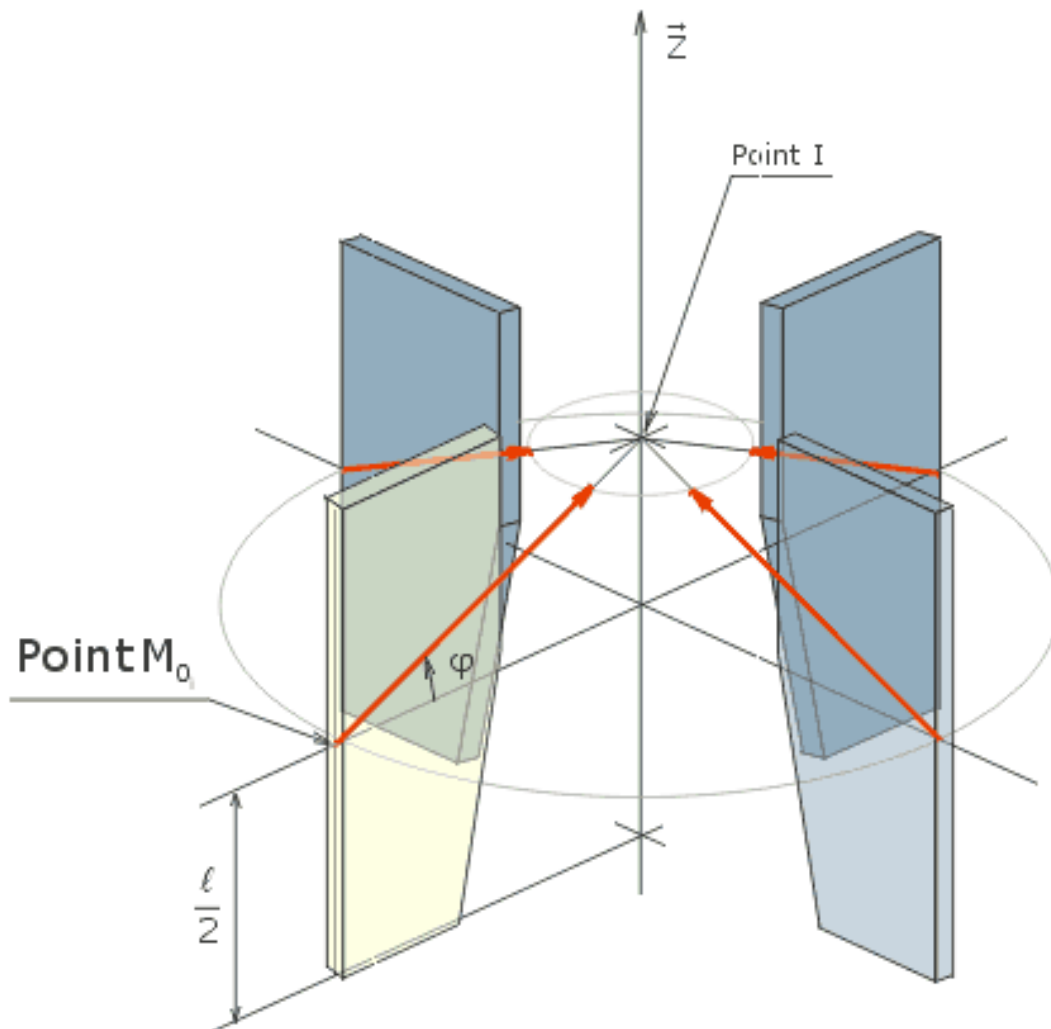
On déduit de l'expression précédente :

$$\boxed{\overrightarrow{M_1 M_0} = \lambda.\vec{z} = \frac{\ell}{2}.\vec{z}}$$

En ce point, le torseur d'action est un glisseur :

$$M_0 \left\{ T_{tube \rightarrow coin} \right\} = \begin{matrix} \left\{ p.(\vec{n} + f.\vec{z}).\ell \right\} \\ \vec{0} \end{matrix}$$

1.3 Les quatre coins étant identiques et disposés à 90° autour de l'axe $(M20_1, \vec{z})$, nous pouvons dire que les actions de contact entre chacun de ces coins et le tube sont réductibles à des glisseurs d'axes centraux $\left(M_{0_i}, \frac{\vec{n}_i + f.\vec{z}}{\|\vec{n}_i + f.\vec{z}\|} \right)$ et de résultante $p.(\vec{n}_i + f.\vec{z}).\ell$ pour $1 \leq i \leq 4$. Les points M_{0_i} se trouvant dans un même plan perpendiculaire à \vec{z} , les différents axes centraux se coupent en un même point I se trouvant sur l'axe $(M20_1, \vec{z})$.



$$\text{Le torseur résultant sera : } {}_I \left\{ \begin{array}{c} T_{\text{tube} \rightarrow \text{coin}} \\ \vec{0} \end{array} \right\} = {}_I \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{i=4} p \cdot (\vec{n}_i + f \vec{z}) \ell \\ \vec{0} \end{array} \right\} = {}_I \left\{ \begin{array}{c} p \cdot \left(\sum_{i=1}^{i=4} \vec{n}_i + 4 \cdot f \cdot \vec{z} \right) \ell \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Comme les vecteurs unitaires \vec{n}_i s'annulent deux à deux, le torseur résultant est un glisseur d'axe central ($M20_1, \vec{z}$) :

$$\boxed{{}_I \left\{ \begin{array}{c} T_{\text{tube} \rightarrow \text{coin}} \\ \vec{0} \end{array} \right\} = {}_I \left\{ \begin{array}{c} 4 \cdot p \cdot \ell \cdot f \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

1.4 Pour déterminer la longueur minimale de contact, ℓ_{\min} , permettant dans le cas le plus défavorable (deux doigts cramponnés) de maintenir l'équilibre du bras BETA soumis aux actions de gravitation, isolons ce bras et appliquons le principe fondamental de la statique, théorème de la résultante en projection sur la direction \vec{z} :

$$\sum \vec{R}_{\text{BETA} \rightarrow \text{BETA}} \cdot \vec{z} = 0$$

Ce qui nous donne à l'équilibre :

$2 \cdot (4 \cdot p \cdot \ell \cdot f) - M_t \cdot g = 0$ Comme la pression de contact p doit être inférieure ou égale à p_{\max} , nous

déduisons donc que $p = \frac{M_t \cdot g}{8 \cdot \ell \cdot f} \leq p_{\max}$ et donc $\ell_{\min} = \frac{M_t \cdot g}{8 \cdot p_{\max} \cdot f}$

Pour toute valeur de ℓ inférieure à cette valeur, en supposant que la pression de contact p_{\max} est la pression maximale admissible de contact entre les coins et les tubes, nous ne pouvons garantir l'équilibre sans déformer la surface de contact (c'est à dire sans avoir une pression de contact supérieure à la pression admissible p_{\max}).

A.N : $\ell_{\min} = 8,1 \text{ mm}$

2.1 Isolons le coin (21). Caractérisons les actions externes :

* Actions réparties linéiques étudiées précédemment : le torseur résultant est à la limite du glissement:

$${}_{M_0} \left\{ \begin{array}{c} T_{\text{tube} \rightarrow (21)} \\ \vec{0} \end{array} \right\} = {}_{M_0} \left\{ \begin{array}{c} p \cdot (\vec{n} + f \vec{z}) \ell \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

* Action ponctuelle parfaite en Q . Le torseur caractéristique est :

$${}_Q \left\{ \begin{array}{c} T_{(20) \rightarrow (21)} \\ \vec{0} \end{array} \right\} = {}_Q \left\{ \begin{array}{c} z_Q \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

* Action de contact avec l'embout conique du vérin (22) :

$$M \left\{ T_{(22) \rightarrow (21)} \right\} = M \begin{Bmatrix} Y \cdot \vec{n} - Y \cdot \tan \alpha \cdot \vec{z} \\ N_M \cdot \vec{t} \end{Bmatrix}$$

En appliquant le principe fondamental de la statique au coin (21) et en utilisant le théorème de la résultante en projection suivant la direction \vec{n} nous avons :

$$\sum \vec{R}_{21 \rightarrow 21} \cdot \vec{n} = 0 \text{ et il vient } p \cdot \ell + Y = 0$$

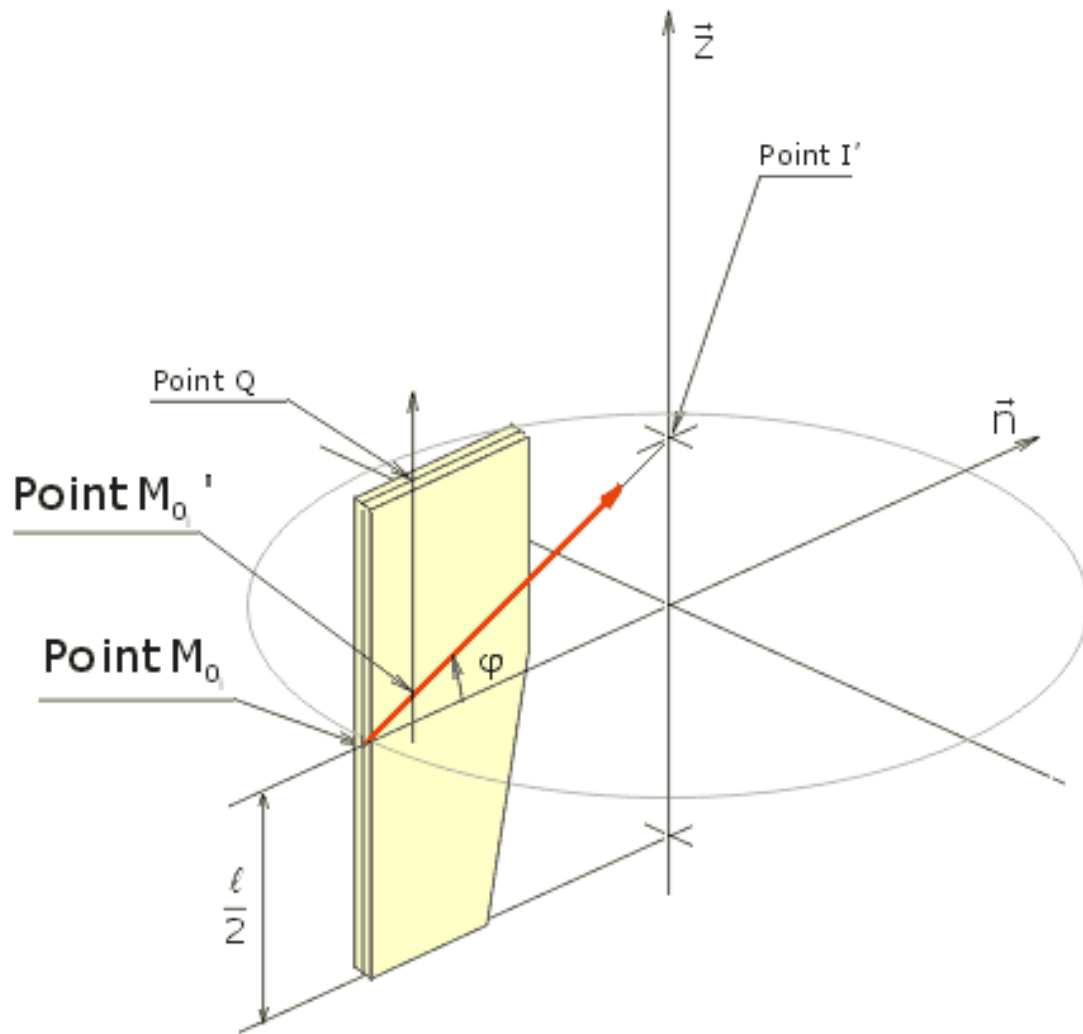
Comme nous avons démontré que la pression de contact entre le tube et le coin est : $p = \frac{M_t \cdot g}{8 \cdot \ell \cdot f}$, nous

déduisons alors la valeur de la composante Y :
$$Y = -p \cdot \ell = -\frac{M_t \cdot g}{8 \cdot f}$$

Nous remarquons d'autre part que le coin est soumis à deux glisseurs plans et un torseur. A l'équilibre ce dernier torseur est aussi un glisseur au point de concours des deux axes centraux des deux glisseurs : axes

$\left(M_{0_i}, \frac{\vec{n}_i + f \cdot \vec{z}}{\|\vec{n}_i + f \cdot \vec{z}\|} \right)$ et (Q, \vec{z}) . Appelons M_{0_i}' ce point. En ce point on a :

$$M_{0_i}' \left\{ T_{(22) \rightarrow (21)} \right\} = M_{0_i}' \begin{Bmatrix} Y \cdot \vec{n} - Y \cdot \tan \alpha \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$



Isolons la tige de vérin (22). Caractérisons les actions externes :

*Actions des quatre coins : Aux points M_{0_i}' les torseurs d'action des coins sur la tige sont des glisseurs dont l'expression est :

$$M_{0_i}' \left\{ T_{(21) \rightarrow (22)} \right\} = M_{0_i}' \left\{ \begin{array}{c} -Y \cdot \vec{n}_i + Y \cdot \tan \alpha \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \text{ d'axe central } \left(M_{0_i}', \frac{-\vec{n}_i + \tan \alpha \vec{z}}{\|-\vec{n}_i + \tan \alpha \vec{z}\|} \right) . \text{ On notera } I'$$

le point d'intersection de cet axe avec l'axe (M_{20_1}, \vec{z}) . En I' nous aurons :

$$I' \left\{ T_{(21) \rightarrow (22)} \right\} = I' \left\{ \begin{array}{c} -Y \cdot \vec{n}_i + Y \cdot \tan \alpha \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Comme par symétrie les phénomènes sont les mêmes en chacun de ces points, nous pouvons donc déterminer le torseur résultant des actions des quatre coins sur la tige en I' :

$$I' \left\{ T_{\Sigma(21) \rightarrow (22)} \right\} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{i=4} (-Y \cdot \vec{n}_i + Y \cdot \tan \alpha \cdot \vec{z}) \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Y \cdot \left(\sum_{i=1}^{i=4} (\vec{n}_i) - 4 \cdot \tan \alpha \cdot \vec{z} \right) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Comme les vecteurs unitaires \vec{n}_i s'annulent deux à deux, le torseur résultant est un glisseur d'axe central ($M20_1, \vec{z}$) :

$$I' \left\{ T_{\Sigma(21) \rightarrow (22)} \right\} = \begin{Bmatrix} 4 \cdot Y \cdot \tan \alpha \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

*Actions de la pression sur la surface active du vérin :

$$I' \left\{ T_{\text{Pression} \rightarrow (22)} \right\} = \begin{Bmatrix} q \cdot S_{\text{utile}} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

*Actions de gravitation négligées sur la tige du vérin.

*Action de la liaison pivot glissant parfaite du corps du vérin (20) sur la tige de vérin (22) :

En un point quelconque de l'axe de la pivot glissant: I' le torseur s'écrit :

$$I' \left\{ T_{(20) \rightarrow (22)} \right\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(-, -, \vec{z})}$$

2.3 Pour déterminer la section utile du vérin, isolons la tige de vérin, appliquons le principe fondamental de la statique à cette tige, théorème de la résultante en projection suivant la direction \vec{z} :

$$\sum \vec{R}_{22 \rightarrow 22} \cdot \vec{z} = 0$$

Il vient :

$$4 \cdot Y \cdot \tan \alpha + q \cdot S_{\text{utile}} = 0 \text{ et donc } S_{\text{utile}} = -\frac{4 \cdot Y \cdot \tan \alpha}{q}$$

En utilisant alors le résultat de la question 2-1 : $Y = -p \cdot \ell = -\frac{M_t \cdot g}{8 \cdot f}$, nous trouvons la section utile du

piston du vérin :
$$S_{\text{utile}} = \frac{M_t \cdot g \cdot \tan \alpha}{2 \cdot q \cdot f} \text{ A.N } S_{\text{utile}} = 7,03 \text{ cm}^2$$