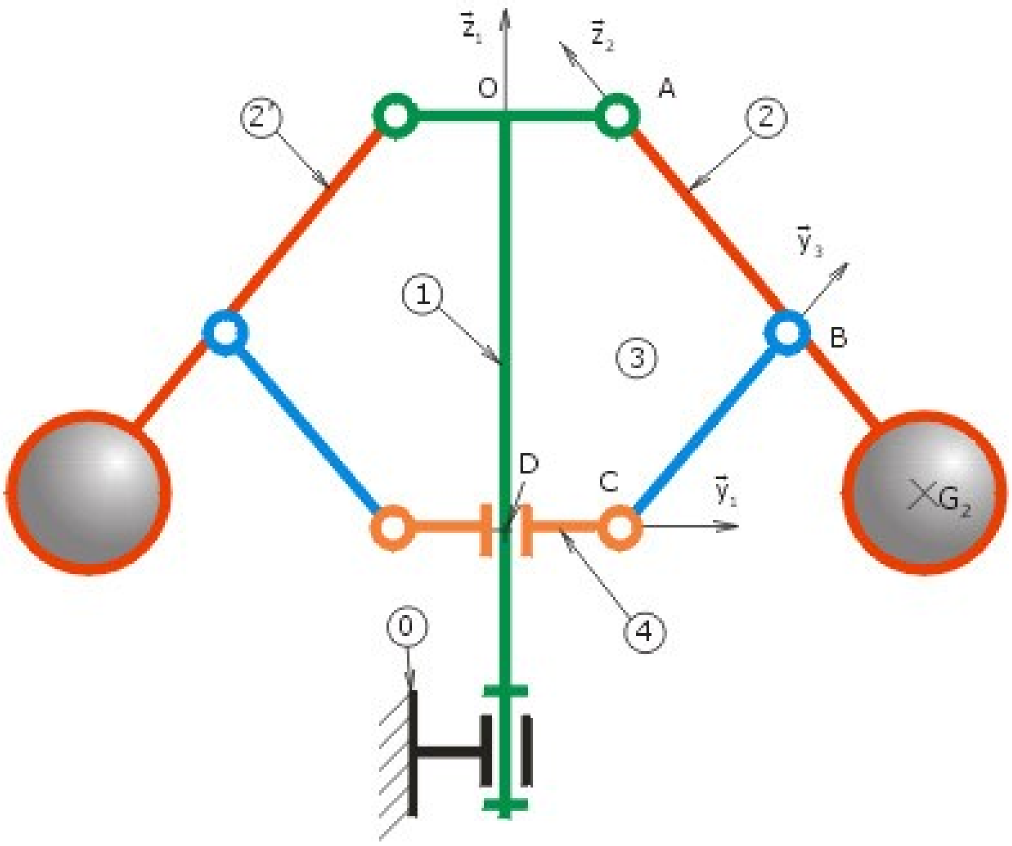
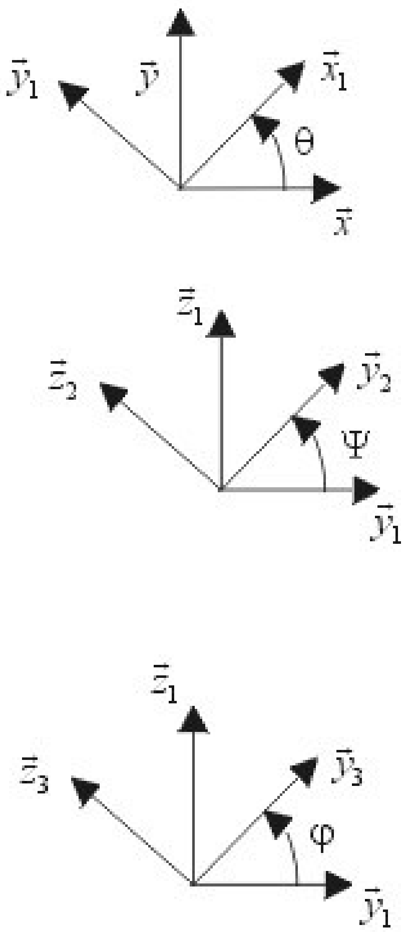
Enoncé

Ce régulateur peut être utilisé en capteur de vitesse dans une boucle d'asservissement. La rotation de l'axe (1) produit une variation d'inclinaison des bras (2) et (2') et donc une variation de position de la pièce (4) suivant l'axe $(O,\vec{z})$ qui est utilisée en grandeur de sortie du capteur. On pose:

$\overrightarrow{OA} = r.\vec{y}_1$, $\overrightarrow{BA} = a.\vec{z}_2$, $\overrightarrow{CB} = a.\vec{y}_3$, $\overrightarrow{DC} = r.\vec{y}_1$, $\overrightarrow{G_2A} = 2.a.\vec{z}_2$





1. En utilisant le paramétrage proposé, déterminer l'angle φ en fonction de Ψ et θ
2. Déterminer alors la vitesse de rotation de la barre (3) par rapport au bâti (0)
3. Déterminer la vitesse et l'accélération de G_2 en supposant que $\dot{\theta} = cte = \omega$
4. Déterminer la vitesse de glissement en D entre (4) et (1) de deux manières différentes.

Solution

1 Pour déterminer la relation φ en fonction de Ψ *et* θ , on utilise une fermeture géométrique en projection:

$$\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DO} = \vec{0} = r.\vec{y}_1 - a.\vec{z}_2 - a.\vec{y}_3 - r.\vec{y}_1 + \overrightarrow{DO}$$

puis en projetant cette relation sur $\vec{y}_1$ on obtient

$$-a.\underbrace{\vec{z}_2.\vec{y}_1}_{\cos(\frac{\pi}{2}+\Psi)} - a.\underbrace{\vec{y}_3.\vec{y}_1}_{\cos(\varphi)} = 0$$

ce qui implique :

$-a.(-\sin(\Psi)) - a.\cos(\varphi) = 0$ et donc que $\sin(\Psi) = \cos(\varphi)$

on déduit que : $\boxed{\Psi = \frac{\pi}{2} \pm \varphi}$

Pour $\varphi = \Psi - \frac{\pi}{2}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$, les bras 2 et 3 sont superposés $\Rightarrow$ solution à rejeter

Pour $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2} - \Psi}$ les deux bras sont dans la configuration de la figure jointe $\Rightarrow$ solution à retenir.

2 La vitesse de rotation est $\boxed{\vec{\Omega}_{3/0} = \dot{\theta}.\vec{z} + \dot{\varphi}.\vec{x}_1 = \dot{\theta}.\vec{z} - \dot{\Psi}.\vec{x}_1}$

3 Cherchons la vitesse du point G_2 .

$$\vec{V}(G_2 \in 2/0) = \vec{V}(A \in 2/0) + \overrightarrow{G_2A} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}$$

Comme :

$$\vec{V}(A \in 2/0) = \vec{V}(A \in 1/0) = \underbrace{\vec{V}(O \in 1/0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$$

On a donc :

$$\vec{V}(G_2 \in 2/0) = \overrightarrow{AO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} + \overrightarrow{G_2A} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}$$

$$\vec{V}(G_2 \in 2/0) = -r.\vec{y}_1 \wedge \dot{\theta}.\vec{z} + 2.a.\vec{z}_2 \wedge (\dot{\Psi}.\vec{x}_1 + \dot{\theta}.\vec{z})$$

$$\boxed{\vec{V}(G_2 \in 2/0) = -(r + 2.a.\sin(\Psi)).\dot{\theta}.\vec{x}_1 + 2.a.\dot{\Psi}.\vec{y}_2}$$

Cherchons à présent l'accélération du point G_2

Par définition:

$$\vec{\Gamma}(G_2 \in 2/0) = \left.\frac{d\vec{V}(G_2 \in 2/0)}{dt}\right)_{R_0}$$

$$\vec{\Gamma}(G_2 \in 2/0) = \left.\frac{d(-(r+2.a\sin(\Psi)).\dot{\theta}.\vec{x}_1 + 2.a.\dot{\Psi}.\vec{y}_2)}{dt}\right)_{R_0}$$

$$\vec{\Gamma}(G_2 \in 2/0) = -2.a.\dot{\Psi}.\cos(\Psi).\dot{\theta}.\vec{x}_1 - (r + 2.a.\sin\Psi).(\underbrace{\ddot{\theta}.\vec{x}_1}_{\vec{0}} + \dot{\theta}^2.\vec{y}_1)$$

$$+ 2.a.\ddot{\Psi}.\vec{y}_2 + 2.a.\dot{\Psi}.\left.\frac{d\vec{y}_2}{dt}\right)_{R_0}$$

Comme :

$$\left.\frac{d\,\vec{y}_2}{dt}\right)_{R_0} = \underbrace{\left.\frac{d\,\vec{y}_2}{dt}\right)_{R_2}}_{\vec{0}} + \vec{y}_2 \wedge \vec{\Omega}_{0/2} = -\vec{y}_2 \wedge (\dot{\Psi}.\vec{x}_1 + \dot{\theta}.\vec{z}) = \dot{\Psi}.\vec{z}_2 - \dot{\theta}.\cos\Psi.\vec{x}_1$$

L'expression de l'accélération du point G_2 est :

$$\vec{\Gamma}(G_2 \in 2/0) = \boxed{-4.a.\dot{\Psi}.\cos(\Psi).\dot{\theta}.\vec{x}_1 - (r + 2.a.\sin\Psi).\dot{\theta}^2.\vec{y}_1 + 2.a.\ddot{\Psi}.\vec{y}_2 + 2.a.\dot{\Psi}^2.\vec{z}_2}$$

4 Pour étudier la vitesse de glissement en D, déterminons :

Première méthode:

$$\vec{V}(D\in 4/1)=\vec{V}(D\in 4/0)-\underbrace{\vec{V}(D\in 1/0)}_{\vec{0}}=\vec{V}(C\in 4/0)+\overrightarrow{DC}\wedge\vec{\Omega}_{4/0}$$

Avec : $\vec{V}(C\in 4/0)=\vec{V}(C\in 3/0)$ et $\vec{V}(C\in 3/0)=\underbrace{\vec{V}(B\in 3/0)}_{\vec{V}(B\in 2/0)}+\overrightarrow{CB}\wedge\vec{\Omega}_{3/0}$

Nous obtenons :

$$\vec{V}(D\in 4/1)=-(r+a.\sin(\Psi)).\dot{\theta}.\vec{x}_1+a.\dot{\Psi}.\vec{y}_2+\underbrace{\overrightarrow{CB}\wedge\vec{\Omega}_{3/0}}_{a.\vec{y}_3\wedge(\dot{\theta}.\vec{z}-\dot{\Psi}.\vec{x}_1)}+\underbrace{\overrightarrow{DC}\wedge\vec{\Omega}_{4/0}}_{r.\vec{y}_1\wedge\dot{\theta}.\vec{z}_1}$$

$$\vec{V}(D\in 4/1)=-(r+a.\sin(\Psi)).\dot{\theta}.\vec{x}_1+a.\dot{\Psi}.\vec{y}_2+a.(\dot{\theta}.\cos(\varphi)\vec{x}_1+\dot{\Psi}.\vec{z}_3)+r.\dot{\theta}.\vec{x}_1$$

$$\vec{V}(D\in 4/1)=-a.\sin(\Psi)\ .\dot{\theta}.\vec{x}_1+a.\dot{\Psi}.\vec{y}_2+a.(\dot{\theta}.\cos(\underbrace{\varphi}_{\frac{\pi}{2}-\Psi}).\vec{x}_1+\dot{\Psi}.\vec{z}_3)$$

$$\boxed{\vec{V}(D\in 4/1)=a.\dot{\Psi}.(\underbrace{\vec{y}_2+\vec{z}_3}_{2.\sin(\Psi).\vec{z}_1})=2.a.\dot{\Psi}.\sin(\Psi).\vec{z}_1}$$

Seconde méthode:

$$\vec{V}(D\in 4/1)=\vec{V}(D\in 4/0)-\underbrace{\vec{V}(D\in 1/0)}_{\vec{0}}=\left.\frac{d\overrightarrow{OD}}{dt}\right)_{R_0}=\left.\frac{d(-2.a.\cos(\Psi).\vec{z}_1)}{dt}\right)_{R_0}=2.a.\dot{\Psi}.\sin(\Psi)\vec{z}_1$$

$$\boxed{\vec{V}(D\in 4/1)=2.a.\dot{\Psi}.\sin(\Psi).\vec{z}_1}$$