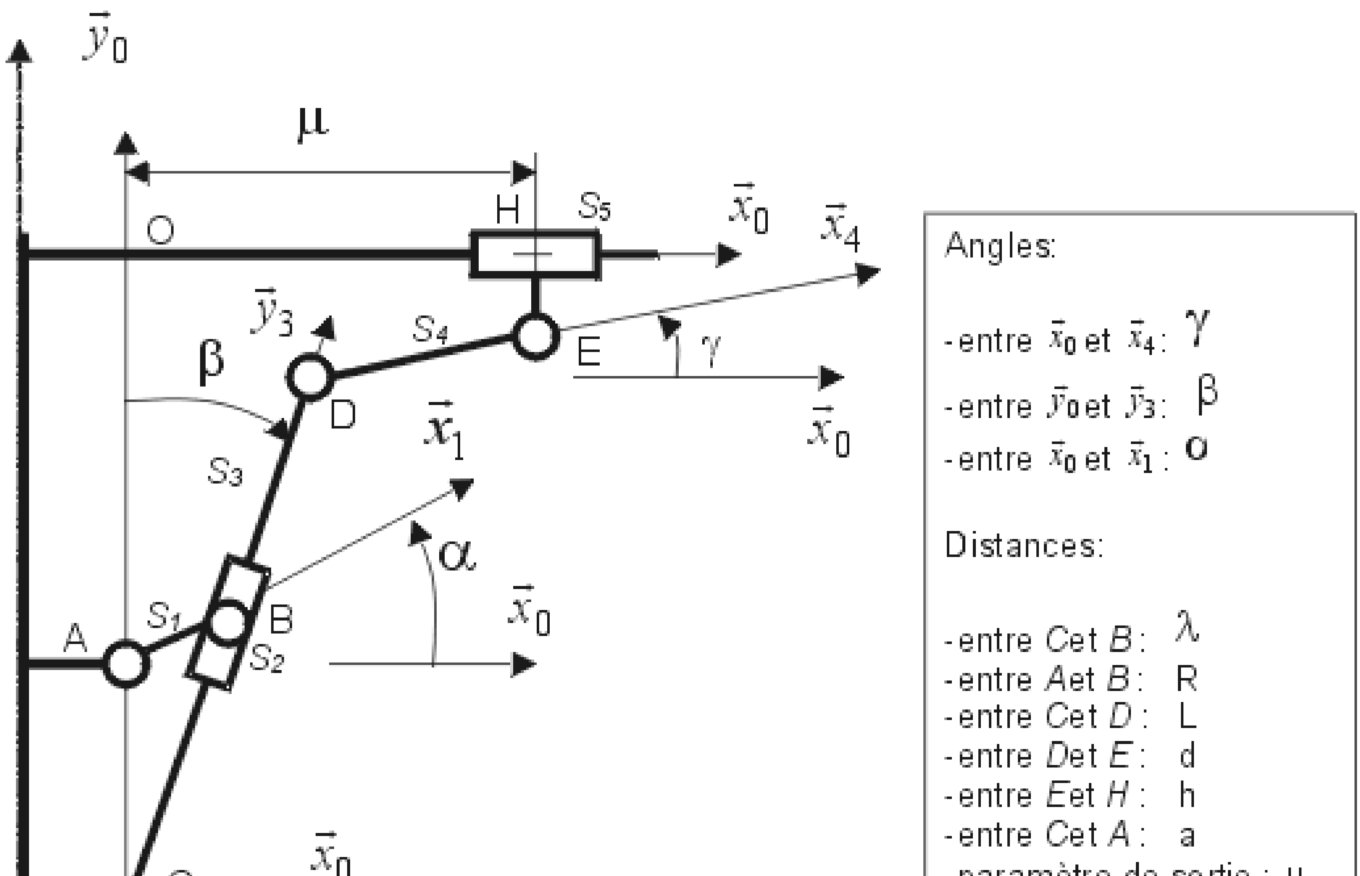
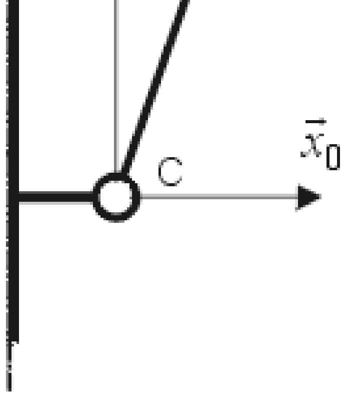
# Enoncé

Le mouvement de chaque solide est parallèle au plan $(C, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ . Le mécanisme comprend cinq solides rigides que l'on peut structurer en deux chaînes fermées à une seule boucle en série. Le mouvement d'entrée du mécanisme est un mouvement de rotation autour de l'axe $(C, \vec{z}_0)$ du solide $S_1$ par rapport au bâti $S_0$ . La variable articulaire paramétrant la rotation plane de $S_1/S_0$ est l'angle $\alpha$ . Le mouvement de sortie est une translation suivant la direction $\vec{x}_0$ du solide $S_5$ par rapport à $S_0$ . Le paramètre de position est $\mu$ . $S_1$ est entraîné par un moteur extérieur au mécanisme . $S_5$ porte un outil de coupe.

| LIAISONS DE LA CHAINE $S_0$-$S_1$-$S_2$-$S_3$-$S_0$ | |
|---|---|
| $S_1/S_0$ | Pivot en A suivant l'axe $\vec{z}_0$ |
| $S_2/S_1$ | Pivot en B suivant l'axe $\vec{z}_0$ |
| $S_2/S_3$ | Glissière en B suivant $\vec{y}_3$ |
| $S_3/S_0$ | Pivot en C suivant l'axe $\vec{z}_0$ |

| LIAISONS DE LA CHAINE $S_0$-$S_3$-$S_4$-$S_5$-$S_0$ | |
|---|---|
| $S_3/S_0$ | Pivot en C suivant l'axe $\vec{z}_0$ |
| $S_4/S_3$ | Pivot en D suivant l'axe $\vec{z}_0$ |
| $S_5/S_4$ | Pivot en E suivant l'axe $\vec{z}_0$ |
| $S_5/S_0$ | Glissière en H suivant $\vec{x}_0$ |






- entre $C$ et $D$ : L
- entre $D$ et $E$ : d
- entre $E$ et $H$ : h
- entre $C$ et $A$ : a
- paramètre de sortie : $\mu$
- entre $C$ et $O$ : e+h

Toutes les liaisons sont parfaites (sans frottement).
Le problème est supposé plan.
Les actions de gravitation sont négligées.
Le mécanisme subit des actions externes dues au moteur et à la coupe.

$$\left\{T_{Moteur\rightarrow S_1}\right\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_1 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} \quad \text{et} \quad \left\{T_{Coupe\rightarrow S_5}\right\} = {}_E\begin{Bmatrix} X_5 & 0 \\ Y_5 & 0 \\ 0 & C_5 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}$$

Le torseur d'action de la pièce (i) sur la pièce (j) sera noté :

$$\left\{T_{i\rightarrow j}\right\} = {}_M\begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_{(-,-,-)}$$

1 Définir la forme des torseurs transmissibles par chaque liaison, en précisant le point de réduction et la base de décomposition.

2 Déterminer en fonction des actions externes, les composantes des torseurs d'action mécanique. Préciser les pièces isolées et les projections réalisées.

---

Solution

1 Le problème est un cas de statique plane car le système est supposé posséder un plan de symétrie et les actions externes appliquées au système se réduisent à des efforts dans ce même plan $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$

et à des moments perpendiculaires à ce plan (suivant $\vec{z}_0$ ) . Dans ces conditions, les torseurs statiques des liaisons sont les suivants :

$$\left\{T_{S_0\to S_1}\right\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{01} & - \\ Y_{01} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(-,-,\vec{z}_0)} \qquad \left\{T_{S_0\to S_3}\right\} = {}_C\begin{Bmatrix} X_{03} & - \\ Y_{03} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(-,-,\vec{z}_0)}$$

$$\left\{T_{S_0\to S_5}\right\} = {}_{\forall\ pt\ M}\begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y_{05} & - \\ - & N_{05} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,-,-)} \qquad \left\{T_{S_1\to S_2}\right\} = {}_B\begin{Bmatrix} X_{12} & - \\ Y_{12} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(-,-,\vec{z}_0)}$$

$$\left\{T_{S_2\to S_3}\right\} = {}_{\forall\ pt\ M}\begin{Bmatrix} X_{23} & - \\ 0 & - \\ - & N_{23} \end{Bmatrix}_{(-,\vec{y}_3,-)} \qquad \left\{T_{S_3\to S_4}\right\} = {}_D\begin{Bmatrix} X_{34} & - \\ Y_{34} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(-,-,\vec{z}_0)}$$

$$\left\{T_{S_4\to S_5}\right\} = {}_E\begin{Bmatrix} X_{45} & - \\ Y_{45} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(-,-,\vec{z}_0)}$$

2 Pour déterminer les 14 composantes des torseurs, il nous faut normalement 14 équations indépendantes. Comme il faut réserver une relation pour lier le couple moteur $\mathbb{C}_1$ à la composante de coupe externe $X_5$ sur la pièce $S_5$ , il faut disposer au total de 15 équations . Ces équations seront déduites du principe fondamental de la statique appliqué à chaque solide.

*Isolons le solide $S_1$

* Caractérisons les actions externes sur ce solide :

$$\left\{T_{S_0\to S_1}\right\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{01} & - \\ Y_{01} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(-,-,\vec{z}_0)}$$

$$\left\{T_{S_2\to S_1}\right\} = -\left\{T_{S_1\to S_2}\right\} = {}_B\begin{Bmatrix} -X_{12} & - \\ -Y_{12} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_0)}$$

$$\left\{T_{Moteur\to S_1}\right\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{C}_1 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}$$

* Appliquons le principe fondamental de la statique à $S_1$ en A , en projection dans la base $B_3(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ :

$$\sum {}_A\left\{T_{\overline{S}_1 \to S_1}\right\}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)} = \left\{\vec{0}\right\}$$

$${}_A\left\{\begin{array}{l|l} X_{01} & - \\ Y_{01} & - \\ - & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)} + {}_A\left\{\begin{array}{l|l} -X_{12} & - \\ -Y_{12} & - \\ - & -r.\left(X_{12}.\sin(\beta-\alpha) + Y_{12}.\cos(\beta-\alpha)\right) \end{array}\right\}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)}$$

$$+ {}_A\left\{\begin{array}{l|l} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{C}_1 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)} = \left\{\begin{array}{l|l} 0 & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{array}\right\}$$

On obtient en projection le système d'équations :

$$\sum \vec{F}_{\overline{1} \to 1} \cdot \vec{x}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_{01} - X_{12} = 0 \qquad 1)$$

$$\sum \vec{F}_{\overline{1} \to 1} \cdot \vec{y}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{01} - Y_{12} = 0 \qquad 2)$$

$$\sum \vec{M}_{A\ \overline{1} \to 1} \cdot \vec{z}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{C}_1 - r.\left(X_{12}.\sin(\beta-\alpha) + Y_{12}.\cos(\beta-\alpha)\right) = 0 \qquad 3)$$

*Isolons le solide $S_2$

* Caractérisons les actions externes sur ce solide :

$$\left\{T_{S_1 \to S_2}\right\} = {}_B\left\{\begin{array}{l|l} X_{12} & - \\ Y_{12} & - \\ - & 0 \end{array}\right\}_{(-,-,\vec{z}_0)}$$

$$\left\{T_{S_3 \to S_2}\right\} = -\left\{T_{S_2 \to S_3}\right\} = {}_{\forall\ pt\ M}\left\{\begin{array}{l|l} -X_{23} & - \\ 0 & - \\ - & -N_{23} \end{array}\right\}_{(-,\vec{y}_3,-)}$$

* Appliquons le principe fondamental de la statique à $S_2$ en B , en projection dans la base $B_3(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ :

$$\sum_B \left\{T_{\overline{S_2} \to S_2}\right\}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)} = \left\{\vec{0}\right\}$$

$$_B\begin{Bmatrix} X_{12} & - \\ Y_{12} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)} + {}_B\begin{Bmatrix} -X_{23} & - \\ 0 & - \\ - & -N_{23} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}$$

On obtient le système d'équations :

$$\sum \vec{F}_{\bar{2} \to 2} \cdot \vec{x}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_{12} - X_{23} = 0 \quad 4)$$

$$\sum \vec{F}_{\bar{2} \to 2} \cdot \vec{y}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{12} = 0 \quad 5)$$

$$\sum \vec{M}_{B\ \bar{2} \to 2} \cdot \vec{z}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{23} = 0 \quad 6)$$

*Isolons le solide $S_3$

* Caractérisons les actions externes sur ce solide :

$$\left\{T_{S_4 \to S_3}\right\} = -\left\{T_{S_3 \to S_4}\right\} = {}_D\begin{Bmatrix} -X_{34} & - \\ -Y_{34} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(-,-,\vec{z}_0)}$$

$$\left\{T_{S_2 \to S_3}\right\} = {}_B\begin{Bmatrix} X_{23} & - \\ 0 & - \\ - & N_{23} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)}$$

$$\left\{T_{S_0 \to S_3}\right\} = {}_C\begin{Bmatrix} X_{03} & - \\ Y_{03} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(-,-,\vec{z}_0)}$$

* Appliquons le principe fondamental de la statique à $S_3$ en C, en projection dans la base $B_3\left(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0\right)$ :

$$\sum_C \left\{T_{\overline{S_3} \to S_3}\right\}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)} = \left\{\vec{0}\right\}$$

$$_C\begin{Bmatrix} -X_{34} & - \\ -Y_{34} & - \\ - & L.X_{34} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_0)} + {}_C\begin{Bmatrix} X_{23} & - \\ 0 & - \\ - & N_{23}-\lambda.X_{23} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_0)}$$

$$+ {}_C\begin{Bmatrix} X_{03} & - \\ Y_{03} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_0)} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}$$

On obtient le système d'équations :

$$\sum \vec{F}_{\bar{3}\to 3} \cdot \vec{x}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -X_{34} + X_{23} + X_{03} = 0 \qquad 7)$$
$$\sum \vec{F}_{\bar{3}\to 3} \cdot \vec{y}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -Y_{34} + Y_{03} = 0 \qquad 8)$$
$$\sum \vec{M}_{C\ \bar{3}\to 3} \cdot \vec{z}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad L.X_{34} + N_{23} - \lambda.X_{23} = 0 \qquad 9)$$

*Isolons le solide $S_4$

* Caractérisons les actions externes sur ce solide :

$$\left\{T_{S_5\to S_4}\right\} = -\left\{T_{S_4\to S_5}\right\} = {}_E\begin{Bmatrix} -X_{45} & - \\ -Y_{45} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(-,-,\vec{z}_0)}$$

$$\left\{T_{S_3\to S_4}\right\} = {}_D\begin{Bmatrix} X_{34} & - \\ Y_{34} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_0)}$$

* Appliquons le principe fondamental de la statique à $S_4$ en D , en projection dans la base $B_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ :

$$\sum {}_D\left\{T_{\overline{S_4}\to S_4}\right\}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} = \left\{\vec{0}\right\}$$

$$_{D}\begin{Bmatrix} -X_{45} & - \\ -Y_{45} & - \\ - & -d.\left(-X_{45}.\sin\gamma+Y_{45}.\cos\gamma\right) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}$$

$$+\ _{D}\begin{Bmatrix} X_{34}.\cos\beta-Y_{34}.\sin\beta & - \\ X_{34}.\sin\beta+Y_{34}.\cos\beta & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}=\begin{Bmatrix} 0 & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}$$

On obtient le système d'équations :

$$\sum \vec{F}_{\bar{4}\to 4}.\vec{x}_0=0 \quad\Rightarrow\quad -X_{45}+X_{34}.\cos\beta-Y_{34}.\sin\beta=0 \qquad 10)$$

$$\sum \vec{F}_{\bar{4}\to 4}.\vec{y}_0=0 \quad\Rightarrow\quad -Y_{45}+X_{34}.\sin\beta+Y_{34}.\cos\beta=0 \qquad 11)$$

$$\sum \vec{M}_{C\ \bar{4}\to 4}.\vec{z}_0=0 \quad\Rightarrow\quad -d.\left(-X_{45}.\sin\gamma+Y_{45}.\cos\gamma\right)=0 \qquad 12)$$

*Isolons le solide $S_5$

* Caractérisons les actions externes sur ce solide :

$$\left\{T_{S_4\to S_5}\right\}=\ _{E}\begin{Bmatrix} X_{45} & - \\ Y_{45} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(-,-,\vec{z}_0)}$$

$$\left\{T_{S_0\to S_5}\right\}=\ _{\forall\ pt\ M}\begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y_{05} & - \\ - & N_{05} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,-,-)}$$

$$\left\{T_{Coupe\to S_5}\right\}=\ _{E}\begin{Bmatrix} X_5 & 0 \\ Y_5 & 0 \\ 0 & \mathbb{C}_5 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}$$

* Appliquons le principe fondamental de la statique à $S_5$ en E , en projection dans la base

$B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ :

$$\sum_E \left\{T_{\overline{S_5} \to S_5}\right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} = \left\{\vec{0}\right\}$$

$$_E\left\{\begin{matrix} X_{45} \\ Y_{45} \\ - \end{matrix} \left| \begin{matrix} - \\ - \\ 0 \end{matrix}\right.\right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} + {}_E\left\{\begin{matrix} 0 \\ Y_{05} \\ - \end{matrix} \left| \begin{matrix} - \\ - \\ N_{05} \end{matrix}\right.\right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} + {}_E\left\{\begin{matrix} X_5 \\ Y_5 \\ 0 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \mathbb{C}_5 \end{matrix}\right.\right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ - \end{matrix} \left| \begin{matrix} - \\ - \\ 0 \end{matrix}\right.\right\}$$

On obtient le système d'équations :

$$\sum \vec{F}_{\bar{5} \to 5} \cdot \vec{x}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_{45} + X_5 = 0 \quad 13)$$

$$\sum \vec{F}_{\bar{5} \to 5} \cdot \vec{y}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{45} + Y_{05} + Y_5 = 0 \quad 14)$$

$$\sum \vec{M}_{E\ \bar{5} \to 5} \cdot \vec{z}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{05} + \mathbb{C}_5 = 0 \quad 15)$$

On dispose de 15 équations :

$$\left|\begin{array}{ll}
X_{01}-X_{12}=0 & 1) \\
Y_{01}-Y_{12}=0 & 2) \\
\mathbb{C}_1-r.\left(X_{12}.\sin(\beta-\alpha)+Y_{12}.\cos(\beta-\alpha)\right)=0 & 3) \\
X_{12}-X_{23}=0 & 4) \\
Y_{12}=0 & 5) \\
N_{23}=0 & 6) \\
-X_{34}+X_{23}+X_{03}=0 & 7) \\
-Y_{34}+Y_{03}=0 & 8) \\
L.X_{34}+N_{23}-\lambda.X_{23}=0 & 9) \\
-X_{45}+X_{34}.\cos\beta-Y_{34}.\sin\beta=0 & 10) \\
-Y_{45}+X_{34}.\sin\beta+Y_{34}.\cos\beta=0 & 11) \\
-d.\left(-X_{45}.\sin\gamma+Y_{45}.\cos\gamma\right)=0 & 12) \\
X_{45}+X_5=0 & 13) \\
Y_{45}+Y_{05}+Y_5=0 & 14) \\
N_{05}+\mathbb{C}_5=0 & 15)
\end{array}\right.$$

Par combinaison de ces équations, nous obtenons les expressions des composantes des torseurs en fonction des composantes des deux torseurs externes appliqués au système.

$$X_{01}=-\frac{L}{\lambda}.\frac{\cos(\gamma-\beta)}{\cos\gamma}.X_5$$

$$Y_{01}=0$$

$$X_{03}=\left(\frac{L}{\lambda}-1\right).\frac{\cos(\gamma-\beta)}{\cos\gamma}.X_5$$

$$Y_{03}=-\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\cos\gamma}.X_5$$

$$Y_{05}=\tan\gamma.X_5-Y_5$$

$$N_{05}=-\mathbb{C}_5$$

$$X_{12}=-\frac{L}{\lambda}.\frac{\cos(\gamma-\beta)}{\cos\gamma}.X_5$$

$$Y_{12}=0$$

$$X_{23}=-\frac{L}{\lambda}.\frac{\cos(\gamma-\beta)}{\cos\gamma}.X_5$$

$$N_{23} = 0$$

$$X_{34} = -\frac{\cos(\gamma - \beta)}{\cos\gamma}.X_5$$

$$Y_{34} = -\frac{\sin(\gamma - \beta)}{\cos\gamma}.X_5$$

$$X_{45} = -X_5$$

$$Y_{45} = -X_5.\tan\gamma$$

$$\mathbb{C}_1 = -r.\sin(\beta - \gamma).\left(\frac{L}{\lambda}.\frac{\cos(\gamma - \beta)}{\cos\gamma}\right).X_5 \quad \Rightarrow \quad \textit{loi} \quad \textit{entrée / sortie}$$