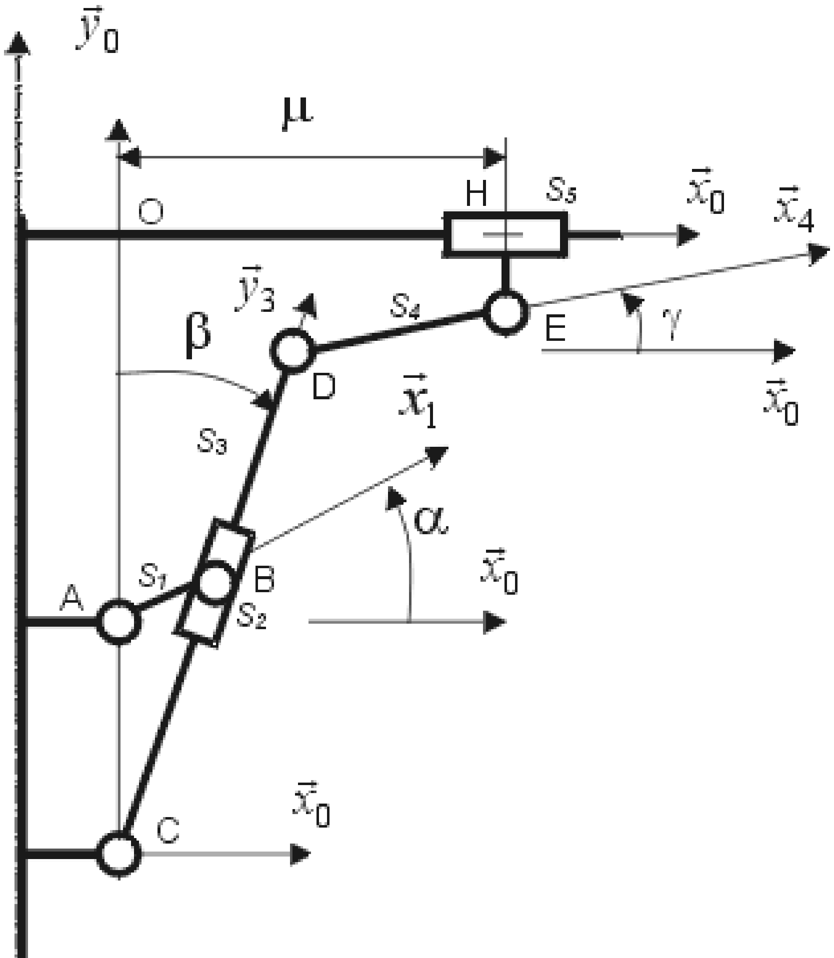
Enoncé

Le mouvement de chaque solide est parallèle au plan $(C, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$. Le mécanisme comprend cinq solides rigides que l'on peut structurer en deux chaînes fermées. Le mouvement d'entrée du mécanisme est un mouvement de rotation autour de l'axe $(C, \vec{z}_0)$ du solide S_1 par rapport au bâti So . La variable articulaire paramétrant la rotation plane de S_1/S_0 est l'angle α . Le mouvement de sortie est une translation suivant la direction $\vec{x}_0$ du solide S_5 par rapport à S_0 . Le paramètre de position est μ . S_1 est entraîné par un moteur extérieur au mécanisme . S_5 porte un outil de coupe.

LIAISONS DE LA CHAINE S_0-S_1-S_2-S_3-S_0	
S_1/S_0	Pivot en A suivant l'axe $\vec{z}_0$
S_2/S_1	Pivot en B suivant l'axe $\vec{z}_0$
S_2/S_3	Glissière en B suivant $\vec{y}_3$
S_3/S_0	Pivot en C suivant l'axe $\vec{z}_0$

LIAISONS DE LA CHAINE S_0-S_3-S_4-S_5-S_0	
S_3/S_0	Pivot en C suivant l'axe $\vec{z}_0$
S_4/S_3	Pivot en D suivant l'axe $\vec{z}_0$
S_5/S_4	Pivot en E suivant l'axe $\vec{z}_0$
S_5/S_0	Glissière en H suivant $\vec{x}_0$



Angles:

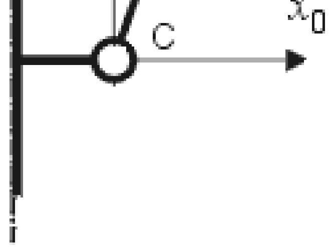
-entre $\vec{x}_0$ et $\vec{x}_4$: γ

-entre $\vec{y}_0$ et $\vec{y}_3$: β

-entre $\vec{x}_0$ et $\vec{x}_1$: α

Distances:

-entre C et B : λ
-entre A et B : R
-entre C et D : L
-entre D et E : d
-entre E et H : h
-entre C et A : a
-paramètre de sortie : μ
-entre C et O : e+h



-paramètre de sortie : μ
-entre C et O : e+h

1 Ecrire les relations géométriques traduisant la fermeture de la chaîne $S_0 - S_1 - S_2 - S_3 - S_0$

2- Pour α donné, exprimer littéralement β en fonction de α puis λ en fonction de α et β

3 Déterminer les vecteurs: $\vec{V}(B \in S_2 / S_3)$, $\vec{\Gamma}(B \in S_2 / S_3)$, $\vec{V}(D \in S_3 / S_0)$, $\vec{\Gamma}(D \in S_3 / S_0)$ projetés dans la base $B_3(\vec{x}_3, \vec{y}_3)$

4 Déterminer β' et λ' en fonction de β , λ et α' .

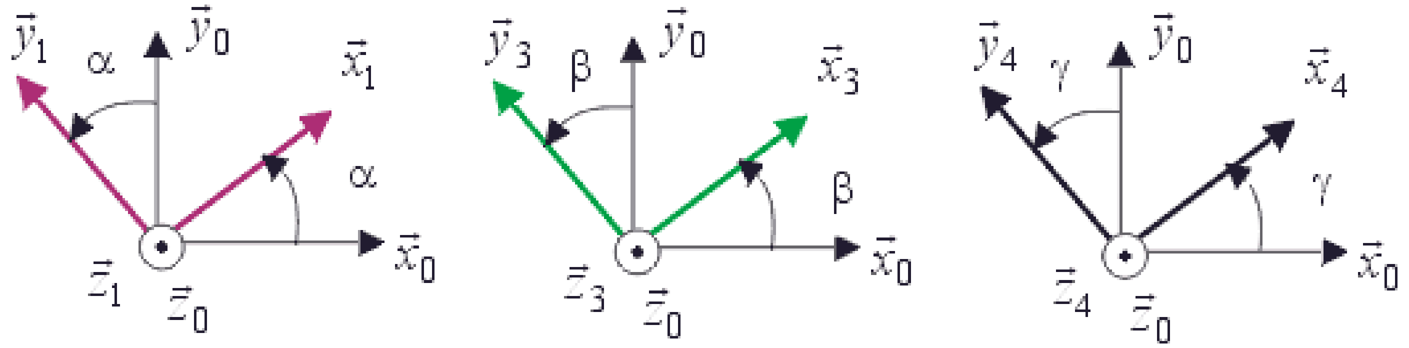
5 Ecrire les relations géométriques traduisant la fermeture de la chaîne $S_0 - S_3 - S_4 - S_5 - S_0$

6- Pour β donné, exprimer littéralement γ en fonction de β puis μ en fonction de β et γ

7 Déterminer $\vec{V}(G \in S_4 / S_0)$ exprimé dans la base $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$. On prendra $\overrightarrow{DG} = \frac{d}{2}.\vec{x}_4$.

Solution

1 Avant de commencer l'étude géométrique , il convient de réaliser des figures planes montrant les différentes rotations planes :



Sur la boucle $S_0 - S_1 - S_2 - S_3 - S_0$, nous pouvons écrire :

$\overrightarrow{CC} = \vec{0} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

En projection sur la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ il vient :

$$\left|\begin{array}{l}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right).\vec{x}_0 = -\lambda.\sin\beta - r.\cos\alpha = 0\\ \left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right).\vec{y}_0 = \lambda.\cos\beta - r.\sin\alpha - a = 0\end{array}\right. \text{ et donc } \left|\begin{array}{ll}\lambda.\sin\beta = -r.\cos\alpha & 1)\\ \lambda.\cos\beta = r.\sin\alpha + a & 2)\end{array}\right.$$

2 Par division terme à terme des relations 1) et 2) nous pouvons écrire :

$$\boxed{\tan\beta = \frac{-r.\cos\alpha}{r.\sin\alpha + a}}$$

En utilisant les relations 1) et 2) nous obtenons :

$$\left|\begin{array}{l}1) \Rightarrow \quad \lambda = -\dfrac{r.\cos\alpha}{\sin\beta}\\ 2) \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{a + r.\sin\alpha}{\cos\beta}\end{array}\right.$$

#

3- Déterminons les différentes vitesses :

$$* \vec{V}(B \in 2/3) = \left.\frac{d\overrightarrow{CB}}{dt}\right)_3 = \left.\frac{d\lambda.\vec{y}_3}{dt}\right)_3 \text{ et donc } \boxed{\vec{V}(B \in 2/3) = \dot{\lambda}.\vec{y}_3}$$

$$* \boxed{\vec{\Gamma}(B \in 2/3) = \left.\frac{d\,\vec{V}(B \in 2/3)}{dt}\right)_3 = \ddot{\lambda}.\vec{y}_3}$$

$$*\ \vec{V}(D\in 3/0)=\left.\frac{d\,\overrightarrow{CD}}{dt}\right)_0=\left.\frac{dL.\vec{y}_3}{dt}\right)_0=\underbrace{\left.\frac{d\,L.\vec{y}_3}{dt}\right)_3}_{\vec{0}}+\vec{y}_3\wedge\underbrace{\vec{\Omega}_{0/3}}_{-\dot{\beta}.\,\vec{z}_0}$$

$$\boxed{\vec{V}(D\in 3/0)=-L.\dot{\beta}.\vec{x}_3}$$

*

$$\vec{\Gamma}(D\in 3/0)=\left.\frac{d\,\vec{V}(D\in 3/0)}{dt}\right)_0=-\left.\frac{d\left(L.\dot{\beta}.\,\vec{x}_3\right)}{dt}\right)_0=-L.\ddot{\beta}.\vec{x}_3-L.\,\dot{\beta}.\underbrace{\left.\frac{d\vec{x}_3}{dt}\right)_0}_{\underbrace{\left.\frac{d\,\vec{x}_3}{dt}\right)_3}_{\vec{0}}+\vec{x}_3\wedge\vec{\Omega}_{0/3}}$$

$$\boxed{\vec{\Gamma}(D\in 3/0)=-L.\ddot{\beta}.\vec{x}_3-L.\dot{\beta}^2.\vec{y}_3}$$

4 Dérivons les relations 1) et 2) déterminées à la première question par rapport au temps :

$$\frac{d\left(-\lambda.\sin\beta-r.\cos\alpha\right)}{dt}=0\qquad\Rightarrow\qquad\dot{\lambda}.\sin\beta+\lambda.\dot{\beta}.\cos\beta-r.\dot{\alpha}.\sin\alpha=0\quad 3)$$

$$\frac{d\left(\lambda.\cos\beta-r.\sin\alpha-a\right)}{dt}=0\qquad\Rightarrow\qquad\dot{\lambda}.\cos\beta-\lambda.\dot{\beta}.\sin\beta-r.\dot{\alpha}.\cos\alpha=0\quad 4)$$

En combinant ces deux dernières relations 3) et 4) :

$$\left|\begin{array}{lll}-3).\cos\beta+4).\sin\beta & \Rightarrow & \dot{\beta}=\dfrac{r}{\lambda}.\,\dot{\alpha}\,.\sin(\alpha-\beta)\\ 3).\sin\beta+4).\cos\beta & \Rightarrow & \dot{\lambda}=r.\dot{\alpha}.\cos(\alpha-\beta)\end{array}\right.$$

5 Réalisons la fermeture géométrique de la chaîne de solides $S_0-S_3-S_4-S_5-S_0$:

$$\overrightarrow{CC} = \vec{0} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OC}$$

En projection sur la base $\left(\vec{x}_0, \vec{y}_0\right)$ il vient :

$$\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OC}\right).\vec{x}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad -L.\sin\beta + d.\cos\gamma - \mu = 0$$

$$\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OC}\right).\vec{y}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad L.\cos\beta + d.\sin\gamma + h - \left(h + e\right) = 0$$

6 A partir de la relation 6) nous pouvons écrire :

$$\boxed{\gamma = Arc\sin\left(\frac{e - L.\cos\beta}{d}\right)}$$

A partir de la relation 5) nous pouvons écrire :

$$\boxed{\mu = d.\cos\gamma - L.\sin\beta}$$

7 Pour déterminer la vitesse $\vec{V}\left(G \in S_4 / S_0\right)$, nous pouvons utiliser deux méthodes :

Première méthode :

$$\vec{V}\left(G \in S_4 / S_0\right) = \underbrace{\vec{V}\left(D \in S_4 / S_0\right)}_{\underbrace{\vec{V}\left(D \in S_3 / S_0\right)}_{\vec{V}\left(O \in S_3 / S_0\right) + \overrightarrow{DO} \wedge \vec{\Omega}_{3/0}}} + \overrightarrow{GD} \wedge \vec{\Omega}_{4/0}$$

$$\vec{V}\left(G \in S_4 / S_0\right) = \vec{0} - \left(L.\vec{y}_3 \wedge \dot{\beta}.\vec{z}\right) - \left(\frac{d}{2}.\vec{x}_4 \wedge \dot{\gamma}.\vec{z}\right)$$

$$\vec{V}\left(G \in S_4 / S_0\right) = -L.\dot{\beta}.\vec{x}_3 + \frac{d}{2}.\dot{\gamma}.\vec{y}_4$$

En décomposition dans la base $B_0\left(\vec{x}_0, \vec{y}_0\right)$, nous obtenons l'expression :

$$\boxed{\vec{V}(G \in S_4 / S_0) = \left(-L.\dot{\beta}.\cos\beta - \frac{d}{2}.\dot{\gamma}.\sin\gamma\right).\vec{x}_0 + \left(-L.\dot{\beta}.\sin\beta + \frac{d}{2}.\dot{\gamma}.\cos\gamma\right).\vec{y}_0}$$

Seconde méthode :

$$\vec{V}(G \in S_4 / S_0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DG}\right)}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{OD}}{dt}\right)_0 + \left.\frac{d\overrightarrow{DG}}{dt}\right)_0 = \underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{CD}}{dt}\right)_0}_{\vec{V}(D \in 3/0)} + \left.\frac{d\left(\frac{d}{2}.\vec{x}_4\right)}{dt}\right)_0$$

$$\vec{V}(G \in S_4 / S_0) = \left.\frac{d\ \overrightarrow{OD}}{dt}\right)_0 + \left.\frac{d\ \overrightarrow{DG}}{dt}\right)_0 = \underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{CD}}{dt}\right)_0}_{\vec{V}(D \in 3/0)} + \left.\frac{d\left(\frac{d}{2}.\vec{x}_4\right)}{dt}\right)_0$$

$$\boxed{\vec{V}(G \in S_4 / S_0) = -L.\dot{\beta}.\vec{x}_3 + \frac{d}{2}.\dot{\gamma}.\vec{y}_4}$$

Nous retrouvons l'expression précédente.