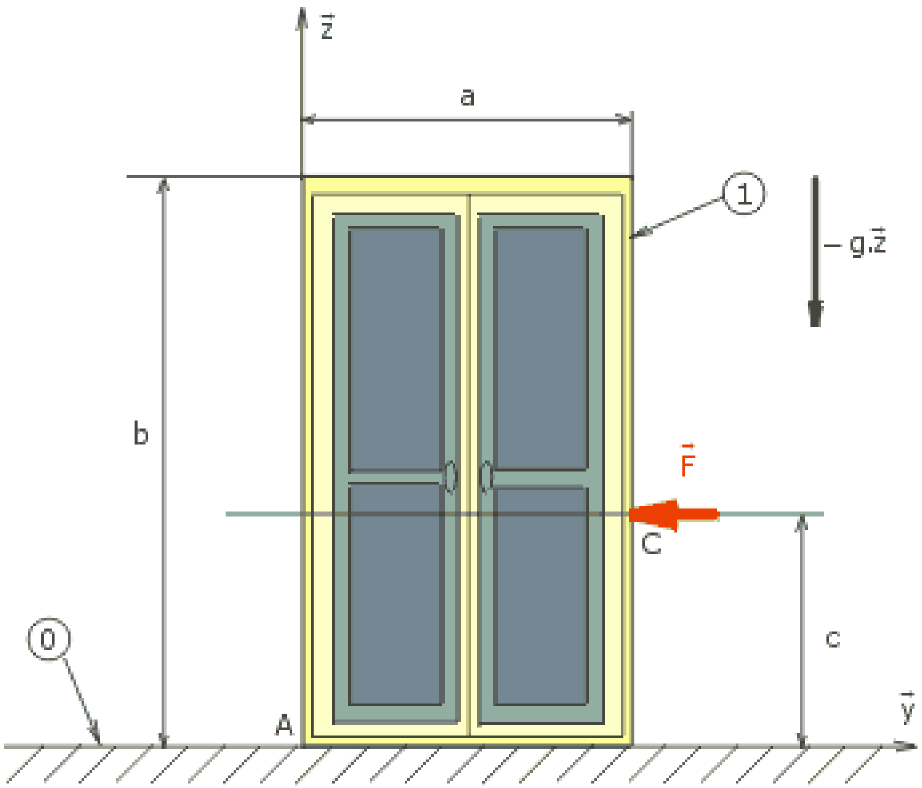
Enoncé

Considérons une armoire en appui sur un plan . On souhaite déplacer très régulièrement cette armoire en la faisant glisser sur le plan tout en évitant son basculement.



On donne $f_{adh} = \tan\varphi_{adh}$ le coefficient d'adhérence entre l'armoire et le plan d'appui. L'armoire de masse m est soumise aux actions de gravitation réductibles à un glisseur au centre de gravité G de l'armoire ($\overrightarrow{AG} = \frac{a}{2}.\vec{y} + \frac{b}{2}.\vec{z}$) . L'effort nécessaire au déplacement de l'armoire est appliqué dans le plan de symétrie $(A, \vec{y}, \vec{z})$. Il est réductible à un glisseur appliqué au point C :

$$\left\{ T_{ext \to 1} \right\} = {}_{\forall M \in (C, \vec{y})} \begin{Bmatrix} \vec{F} = -F.\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

1 En considérant que le problème est un problème de statique plane, déterminer les conditions pour lesquelles l'armoire glissera sur le sol sans basculer.

Solution

1 Isolons l'armoire (1).

La modélisation de ce problème en problème de statique plane est justifiée car , il existe un plan de symétrie et les actions externes sont réductibles dans ce cas de figure à deux glisseurs situés dans le plan de symétrie $\left(A, \vec{y}, \vec{z}\right)$.

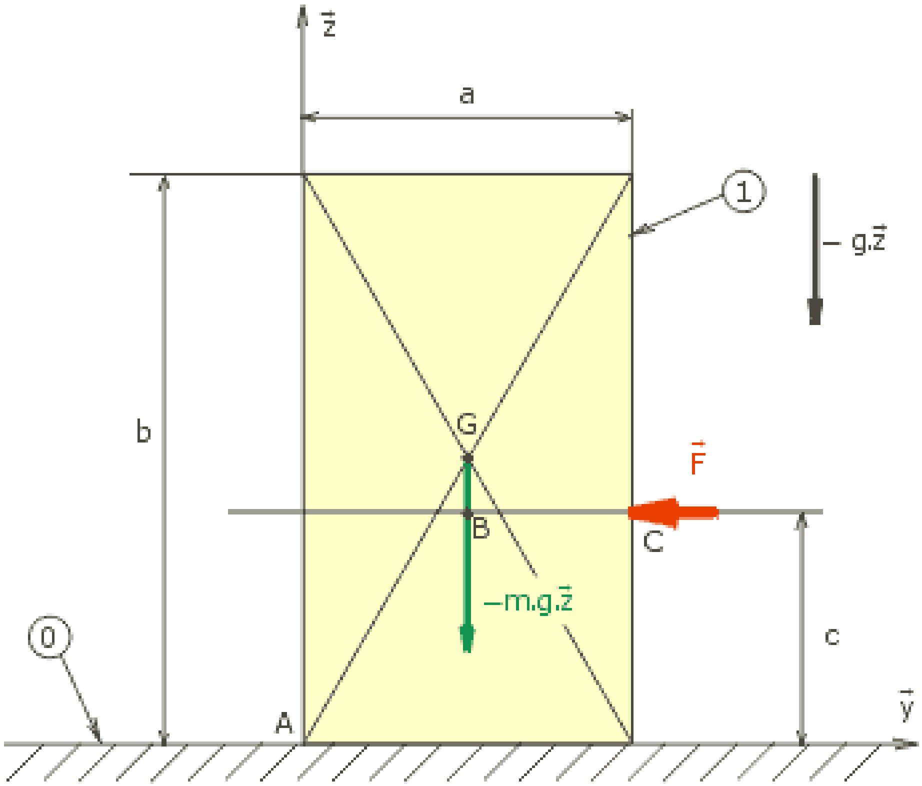
Caractérisons les actions externes appliquées à l'armoire dans le cas d'un problème plan :

$$\left\{T_{ext \rightarrow 1}\right\} = {}_{\forall M \in \left(C, \vec{y}\right)}\left\{\begin{matrix} \vec{F} = -F.\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{T_{0 \rightarrow 1}\right\} = {}_{\forall M}\left\{\begin{matrix} - & L_{01} \\ Y_{01} & - \\ Z_{01} & - \end{matrix}\right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$ dans le cas d'un problème plan avec frottement

$$\left\{T_{gravitation \rightarrow 1}\right\} = {}_{\forall M \in \left(G, \vec{z}\right)}\left\{\begin{matrix} \vec{F} = -m.g.\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$ G étant le centre de gravité de l'armoire

Appliquons le PFS à l'armoire (1) au point B , point d'intersection des axes centraux des glisseurs $\left\{T_{ext \rightarrow 1}\right\}$ et $\left\{T_{gravitation \rightarrow 1}\right\}$. Comme ce solide est soumis à deux glisseurs coplanaires, à l'équilibre le torseur $\left\{T_{0 \rightarrow 1}\right\}$ est aussi un glisseur au point de concours B.



Au point B, nous pouvons écrire :

$$\left\{T_{ext \to 1}\right\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{F} = -F.\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{T_{0 \to 1}\right\} = {}_B\begin{Bmatrix} - & 0 \\ Y_{01} & - \\ Z_{01} & - \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\left\{T_{gravitation \to 1}\right\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{F} = -m.g.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Le théorème de la résultante statique permet d'écrire à l'équilibre :

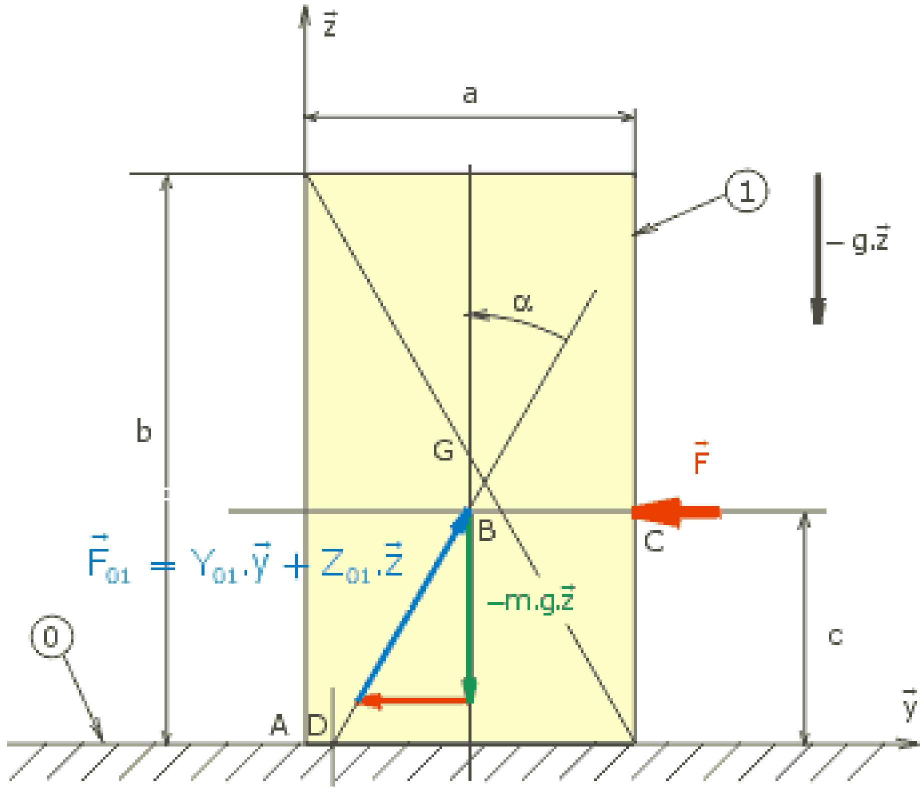
$$\sum \vec{F}_{\bar{1} \to 1} = \vec{0}$$

Dans le cas d'un problème plan, nous déduisons deux relations scalaires en projection dans la base $(\vec{y}, \vec{z})$:

$$\left| \begin{array}{ll} Y_{01} - F = 0 & 1) \\ Z_{01} - m.g = 0 & 2) \end{array} \right. \text{ Il vient : } \boxed{\left| \begin{array}{l} Y_{01} = F \\ Z_{01} = m.g \end{array} \right.}$$

Une analyse graphique de l'équilibre nous aurait permis de déduire directement

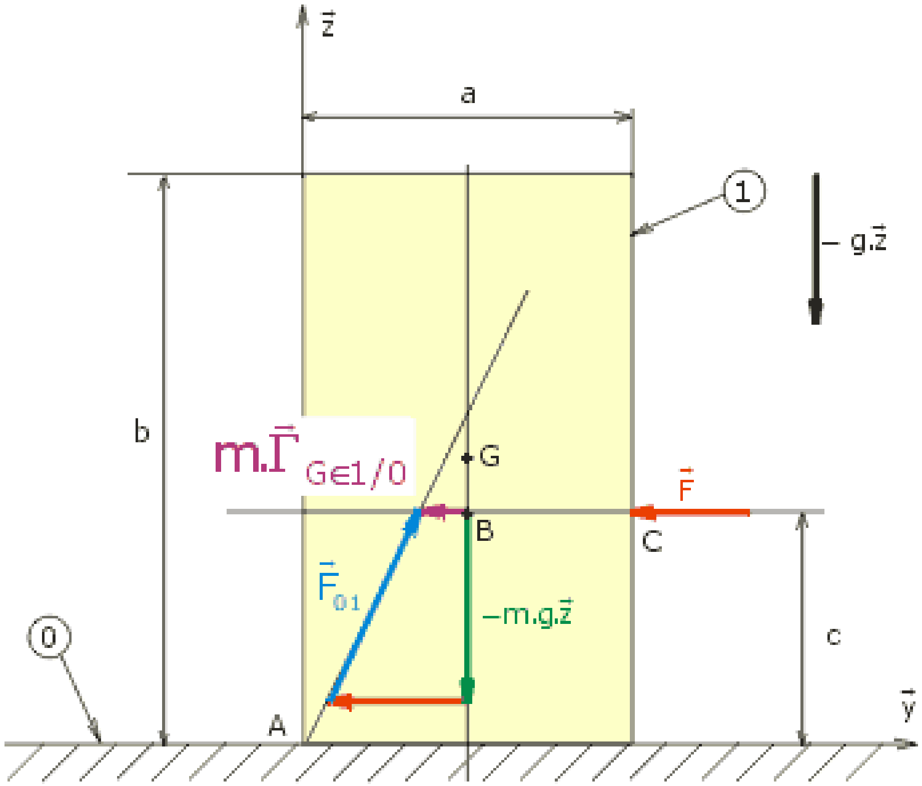
$\vec{F}_{01} = Y_{01}.\vec{y} + Z_{01}.\vec{z}$. En effet à l'équilibre, le solide étant soumis à trois glisseurs, la somme des résultantes des glisseurs nous donne le vecteur nul :



En considérant que l'angle α oriente le vecteur $\vec{F}_{01}$ par rapport à la direction $\vec{z}$, nous pouvons noter que :

* Tant que $\tan \alpha \leq \tan \varphi_{adh}$, l'armoire ne pourra se déplacer. Dans ce cas, en utilisant les relations scalaires déduites précédemment, nous aurons : $\tan \alpha = \dfrac{F}{mg} = \dfrac{Y_{01}}{Z_{01}}$ et donc : $\dfrac{Y_{01}}{Z_{01}} \leq \tan \varphi_{adh}$.

* Pour une valeur de F telle que $F > F_{limite}$ avec $F_{limite} = m.\,g.\tan \varphi_{adh}$, on observera un déplacement de l'armoire . L'angle α prendra alors une valeur fixe : $\alpha = \varphi_{frottement}$. La configuration des efforts sera la suivante :



On peut alors écrire que la condition de mise en mouvement de l'armoire est :

$F > F_{\text{limite}}$ et donc $F > m.\,g.\tan\varphi_{adh} \quad \Rightarrow \boxed{\dfrac{F}{mg} > \tan\varphi_{adh}}$ 1)

Remarque : Si l'on souhaite déplacer cette armoire aussi régulièrement que possible, il faut éviter de produire un effort de poussée trop important . Au delà de la valeur $F = F_{\text{limite}}$, le surplus d'effort sera converti en accélération de l'armoire. L'effort judicieux se situe autour de la valeur $F = F_{\text{limite}}$. On peut prédire que le déplacement de l'armoire dans ce cas sera chaotique du fait de la variation possible du coefficient d'adhérence entre le sol et l'armoire (chacun en a fait déjà l'expérience).

Intéressons-nous maintenant au non basculement de l'armoire. Nous pouvons remarquer que s'il y a un basculement de l'armoire, nous pourrons l'observer autour du point A . Dans ce cas, la somme des moments extérieurs en A appliqués à l'armoire, sera positive autour de l'axe $(A, \vec{x})$. La condition de non basculement sera donc :

$$\sum \vec{M}_{A\ \bar{1} \rightarrow 1} . \vec{x} = 0$$

En supposant que le déplacement de l'armoire est régulier (avec un effort de poussée autour de la position $F = F_{\text{limite}}$) et donc que ses quantités d'accélérations sont négligeables, nous pouvons écrire :

$$\sum \vec{M}_{A\ \bar{1} \rightarrow 1} . \vec{x} = c.F - m.g.\frac{a}{2} + \vec{M}_{A\ 0 \rightarrow 1} . \vec{x}$$

Comme les éléments d'efforts du sol (0) sur l'armoire (1) ne peuvent avoir de composantes suivant la direction $\vec{z}$ que positives, le moment $\vec{M}_{A\ 0 \rightarrow 1} . \vec{x}$ ne peut être que positif . Pour obtenir

$\sum \vec{M}_{A\ \bar{1} \rightarrow 1} . \vec{x} = 0$ il faut que $c.F - mg.\frac{a}{2} < 0$ et donc $\boxed{\frac{F}{mg} < \frac{a}{2.c}}$ 2)

Par combinaison des relations 1) et 2), nous obtenons : $\tan \varphi_{adh} < \frac{F}{mg} < \frac{a}{2.c}$. Il vient donc

$\boxed{2.f_{adh} < \frac{a}{c}}$

Dans ce cas, il y aura déplacement de l'armoire sans basculement.