A.III. Systèmes du second ordre

Supposons une entrée sinusoïdale de pulsation ω :

$$e(t) = e_0 \sin \omega t \, u(t)$$

La sortie en régime permanent sera de la forme :

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi) \, u(t)$$

Avec :

$$\begin{cases} s_0 = |H(j\omega)| e_0 \\ \varphi = \arg H(j\omega) \end{cases}$$

Il nous faut donc déterminer, en fonction de ω, les valeurs de $|H(j\omega)|$ et de $\arg H(j\omega)$.

Pour un système du second ordre, on a :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{{\omega_0}^2} p^2}$$

Il est possible de connaître la réponse d'un système du 2° ordre à une entrée sinusoïdale en régime transitoire, mais ce n'est pas celle qui nous intéressera dans cette partie.

$$E(p) = e_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{{\omega_0}^2} p^2} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{K e_0 \omega}{(p^2 + \omega^2)(1 + Tp)}$$

En faisant une décomposition en éléments simples et en appliquant la transformée de Laplace inverse à $S(p)$, on obtient :

Régime permanent

$$s(t) = f(t) + \boldsymbol{s_0 \sin(\omega t + \varphi) \, u(t)}$$

Régime transitoire

Nous ne détaillerons pas cette fois ci la réponse en régime transitoire, l'intérêt de son expression étant limité face à la difficulté de résolution dans les 3 cas (z) étudiés précédemment.

A.III.1 Caractéristiques de la sortie en régime permanent

Dans le cas de réponses harmoniques, nous allons uniquement nous intéresser aux réponses en régime permanent.

A.III.1.a Calcul des caractéristiques

Dans le cas de réponses harmoniques, nous allons uniquement nous intéresser aux réponses en régime permanent.

Exprimons la fonction de transfert du système dans le domaine complexe :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{{\omega_0}^2}p^2} = \frac{K}{ap^2 + bp + 1} \quad ; \quad \begin{cases} a = \frac{1}{{\omega_0}^2} \\ b = \frac{2z}{\omega_0} \end{cases}$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{a(j\omega)^2 + bj\omega + 1} = \frac{K}{(1 - a\omega^2) + jb\omega}$$

Module	Argument
$\lvert H(j\omega)\rvert = \left\lvert\frac{K}{(1 - a\omega^2) + jb\omega}\right\rvert$ $\lvert H(j\omega)\rvert = \frac{K}{\lvert(1 - a\omega^2) + jb\omega\rvert}$	$\varphi = \arg H(j\omega) = \arg\frac{K}{(1 - a\omega^2) + jb\omega}$ $\varphi = \arg(K) - \arg\big((1 - a\omega^2) + jb\omega\big)$ $\varphi = -\arg\big((1 - a\omega^2) + jb\omega\big)$ $\varphi = \arg\big((1 - a\omega^2) - jb\omega\big) = \arg(A + jB)$ $\begin{cases} A = 1 - a\omega^2 \\ B = -b\omega \end{cases}$ $\tan(\varphi) = \frac{B}{A}$; $\cos(\varphi) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$; $\sin(\varphi) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ $\tan(\varphi) = \frac{-b\omega}{1 - a\omega^2}$ $\cos(\varphi) = \frac{1 - a\omega^2}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$ $\sin(\varphi) = \frac{-b\omega}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$ $\Rightarrow \varphi = \mathrm{sign}(B)\cos^{-1}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)$ $\mathrm{sign}(B) = \mathrm{sign}(-b\omega) \leq 0 \ \forall(\omega, z)$
$\boldsymbol{\lvert H(j\omega)\rvert = \frac{K}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}}$	$\boldsymbol{\varphi = -\cos^{-1}\left(\frac{1 - a\omega^2}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}\right)}$
Ou encore : $\lvert H(j\omega)\rvert = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}\right)^2 + \left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$	Ou encore : $\varphi = -\cos^{-1}\left(\frac{1 - \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}\right)^2 + \left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right)$

Remarque : éviter de passer par la fonction $\tan^{-1}$ qui donne un résultat dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ qui nécessite une réflexion et l'ajout de $\pm\pi$ selon la valeur de φ calculée.

A.III.1.b Bilan

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{{\omega_0}^2}p^2} = \frac{K}{ap^2 + bp + 1} \quad ; \quad \begin{cases} a = \frac{1}{{\omega_0}^2} \\ b = \frac{2z}{\omega_0} \end{cases}$$

$$e(t) = e_0 \sin \omega t$$

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$s(t) = |H(j\omega)| e_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

2° ordre

$$s(t) = \frac{K}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} e_0 \sin\left(\omega t - \cos^{-1}\left(\frac{1 - a\omega^2}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}\right)\right)$$

$$s(t) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}\right)^2 + \left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} e_0 \sin\left(\omega t - \cos^{-1}\left(\frac{1 - \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}\right)^2 + \left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right)\right)$$

On voit que :

- Pour une entrée d'amplitude e_0, l'amplitude de la sortie vaut $\frac{K}{\sqrt{(1-a\omega^2)^2+(b\omega)^2}} e_0$ et peut-être soit amplifiée, soit atténuée
- La sortie est déphasée négativement de $\varphi = -\cos^{-1}\left(\frac{1-a\omega^2}{\sqrt{(1-a\omega^2)^2+(b\omega)^2}}\right)$ radians, cela correspond à un décalage entre l'entrée et la réponse du système, la réponse étant en retard par rapport à l'entrée

A.III.2 Représentation graphique

A.III.2.a Diagrammes de Bode

A.III.2.a.i Etude du gain

• **<u>Expression – Tracé – Observations</u>**

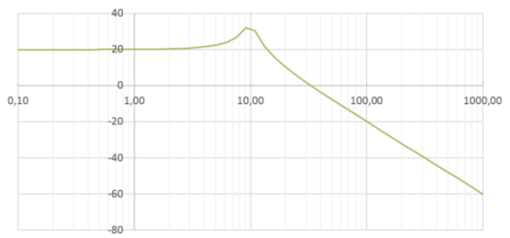
$$G_{db} = 20\log|H(j\omega)| = 20\log\frac{K}{\sqrt{(1-a\omega^2)^2+(b\omega)^2}} = 20\log K - 20\log\sqrt{(1-a\omega^2)^2+(b\omega)^2}$$

$$\boxed{G_{db} = 20\log K - 10\log((1-a\omega^2)^2+(b\omega)^2)} \quad \mathbf{2°\ ordre}$$

Traçons G_{db} en fonction de ω pour 4 valeurs de z : $\begin{cases} z_1 = 0,1 \\ z_2 = 0,8 \\ z_3 = 1 \\ z_4 = 10 \end{cases}$ et $\begin{cases} K = 10 \\ \omega_0 = 10 \end{cases}$

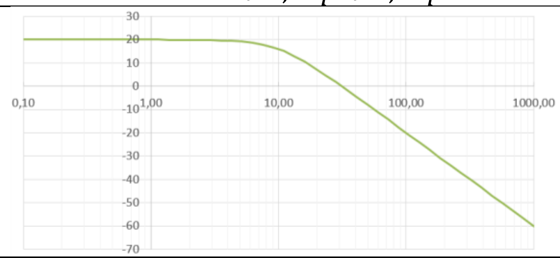
$z_1 = 0,1$

$$H(p) = \frac{10}{1+0,02p+0,01p^2}$$



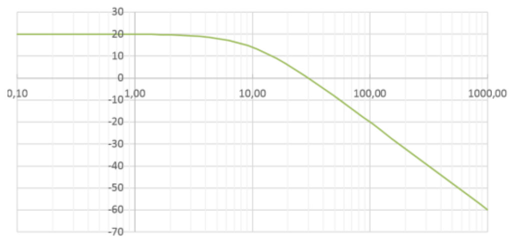
$z_2 = 0,8$

$$H(p) = \frac{10}{1+0,16p+0,01p^2}$$



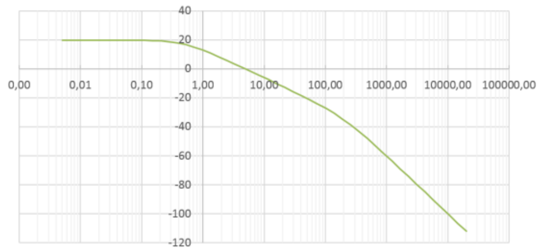
$z_3 = 1$

$$H(p) = \frac{10}{1+0,2p+0,01p^2}$$



$z_4 = 10$

$$H(p) = \frac{10}{1+2p+0,01p^2}$$



On remarque dans tous les cas :

- Une asymptote horizontale à la valeur de $20\log K$ lorsque $\omega \to 0$
- Une asymptote de pente -40 décibels par décade lorsque $\omega \to +\infty$

Par ailleurs, selon les cas :

- Une forme asymptotique similaire lorsque $z \leq 1$
- La présence d'un « pic » dans le cas où $z_1 = 0,1$
- Pas de pic dans le cas où $z_1 = 0,8$
- La présence d'une nouvelle asymptote dans le cas ou $z > 1$, de pente -20 décibels par décade

- **Caractéristiques du gain**

$$G_{db} = 20\log K - 10\log((1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2)$$

$\omega \to 0 \quad \Rightarrow \quad \log\omega \to -\infty$	$\omega \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \log\omega \to +\infty$
$\lvert H(j\omega)\rvert \underset{0}{\sim} K$ $G_{db} \underset{0}{\sim} 20\log K = G_0$ Asymptote horizontale	$\lvert H(j\omega)\rvert \underset{+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{a^2\omega^4}} = \frac{K}{a\omega^2} = \frac{K}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{K{\omega_0}^2}{\omega^2}$ $G_{db} \underset{+\infty}{\sim} 20\log\frac{K{\omega_0}^2}{\omega^2} = 20\log K{\omega_0}^2 - 20\log\omega^2$ $G_{db} \underset{+\infty}{\sim} 20\log K{\omega_0}^2 - 40\log\omega$ Asymptote décroissante de pente $-40\ db/dec$
Intersection des asymptotes	**Pulsation à laquelle le gain est nul ω_{c_0}**
L'intersection de ces deux droites asymptotes a lieu en : $20\log K = 20\log K{\omega_0}^2 - 40\log\omega$ $= 20\log K + 20\log{\omega_0}^2 - 40\log\omega$ $20\log{\omega_0}^2 = 20\log\omega^2$ $\log{\omega_0}^2 = \log\omega^2$ $\omega = \omega_0$ Calculons le gain à cette pulsation : $G_{db} = 20\log\frac{K}{\sqrt{\left(1-\frac{{\omega_0}^2}{{\omega_0}^2}\right)^2 + \left(\frac{2z}{\omega_0}\omega_0\right)^2}}$ $= 20\log\frac{K}{2z}$ $= 20\log K - 20\log(2z)$ $\boldsymbol{G_{db}(\omega_0) = G_0 - 20\log(2z)}$ Cas particulier $z = 0{,}5$: $G_{\omega_0} = G_0 - 20\log(2z) = G_0$	Le gain (décroissant) ne peut être nul que si $\lim\limits_{\omega\to 0} G_{db} > 0$, c'est-à-dire $20\log K > 0$, soit $K > 1$ $G_{db} = 0$ $\Leftrightarrow 20\log K = 10\log\left(\left(1 - a{\omega_{c_0}}^2\right)^2 + \left(b\omega_{c_0}\right)^2\right)$ $\Leftrightarrow \log K^2 = \log\left(\left(1 - a{\omega_{c_0}}^2\right)^2 + \left(b\omega_{c_0}\right)^2\right)$ $\Leftrightarrow K^2 = \left(1 - a{\omega_{c_0}}^2\right)^2 + \left(b\omega_{c_0}\right)^2$ $\Leftrightarrow a^2{\omega_{c_0}}^4 + +(b^2 - 2a){\omega_{c_0}}^2 + (1 - K^2) = 0$ $\Omega_{c_0} = {\omega_{c_0}}^2$ ${\Omega_{c_0}}^2 + \frac{b^2 - 2a}{a^2}\Omega_{c_0} + \frac{1 - K^2}{a^2} = 0$ ${\Omega_{c_0}}^2 + \frac{\frac{4z^2}{{\omega_0}^2} - 2\frac{1}{{\omega_0}^2}}{\frac{1}{{\omega_0}^4}}\Omega_{c_0} + \frac{1 - K^2}{\frac{1}{{\omega_0}^4}} = 0$ ${\Omega_{c_0}}^2 + 2{\omega_0}^2(2z^2 - 1)\Omega_{c_0} + {\omega_0}^4(1 - K^2) = 0$ $\Delta = 4{\omega_0}^4(2z^2 - 1)^2 - 4{\omega_0}^4(1 - K^2)$ $\Delta = 4{\omega_0}^4[(2z^2 - 1)^2 + (K^2 - 1)]$ $K > 1 \Rightarrow \Delta > 0$ $\Omega_{c_0} = \frac{-2{\omega_0}^2(2z^2 - 1) \pm \sqrt{4{\omega_0}^4[(2z^2 - 1)^2 + (K^2 - 1)]}}{2}$ $\Omega_{c_0} = {\omega_0}^2\left((1 - 2z^2) \pm \sqrt{(2z^2 - 1)^2 + (K^2 - 1)}\right)$ $\Omega_{c_0} > 0 \Rightarrow \Omega_{c_0} = {\omega_0}^2\left((1 - 2z^2) + \sqrt{(1 - 2z^2)^2 + (K^2 - 1)}\right)$ $\omega_0 > 0$ $\omega_{c_0} = \omega_0\sqrt{(1 - 2z^2) + \sqrt{(1 - 2z^2)^2 + (K^2 - 1)}}$

Selon la valeur de z, le tracé de Bode en gain en dehors des deux asymptotes obtenues n'est pas le même. Etudions les 3 cas possibles.

$z > 1$	$z = 1$
$H(p) = \frac{K}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$ $H(p) = K\frac{1}{1+T_1p}\frac{1}{1+T_2p}$ $H(p) = KH_1(p)H_2(p)$ $\left\{\omega_{c_1} = \frac{1}{T_1}\right\} \neq \left\{\omega_{c_2} = \frac{1}{T_2}\right\}$ Remarque : $ap^2 + bp + c \quad ; \quad \Delta > 0$ $= a(p-p_1)(p-p_2)$ $= ap_1p_2\left(1-\frac{1}{p_1}p\right)\left(1-\frac{1}{p_2}p\right)$ $= k(1+T_1p)(1+T_2p)$ $T_1 = \frac{1}{\omega_1} = -\frac{1}{p_1}; T_2 = \frac{1}{\omega_2} = -\frac{1}{p_2}$ Pour trouver T_1 et T_2, il faut calculer les racines (négatives) du polynôme au dénominateur $min(\omega_1,\omega_2) < \omega_0 < max(\omega_1,\omega_2)$	$H(p) = \frac{K}{(1+Tp)^2}$ $H(p) = K\frac{1}{1+Tp}\frac{1}{1+Tp}$ $H(p) = KG(p)G(p)$ $\omega_{c_1} = \omega_{c_2} = \frac{1}{T}$ Remarque : $ap^2 + bp + c \quad ; \quad \Delta = 0$ $= a(p-p_0)^2$ $= ap_0\left(1-\frac{1}{p_0}p\right)^2$ $= k(1+T_0p)^2$ Pour trouver T_0,on peut calculer la racine double (négative) du polynôme au dénominateur. Sinon : $T_0 = T = \frac{1}{\omega_0}$
Dans ces deux cas, on reconnaît le produit de deux fonctions de transfert du 1° ordre dont on connaît le diagramme de Bode ainsi que d'une constante K Il suffit donc de sommer 3 courbes en gain : 2 systèmes du premier ordre + 1 constante	
$z > 1$	$z = 1$
Les deux tracés du 1° ordre ne sont pas superposés, il existe une zone de pente à -20 db/dec entre ω_{c_1} et ω_{c_2}	Les deux tracés du 1° ordre sont superposés, il n'existe pas de zone de pente à -20 db/dec

$z < 1$
$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j2z\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}} = \frac{K}{(1-u) + j(2zu)} \quad ; \quad u = \frac{\omega}{\omega_0}$ $\lvert H(j\omega)\rvert = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4z^2u^2}}$ Montrons qu'il peut exister un maximum de $\lvert H(j\omega)\rvert$, résolvons : $\frac{d\lvert H(j\omega)\rvert}{du} = 0$ $\frac{d\lvert H(j\omega)\rvert}{du} = \frac{-K\left(\sqrt{(1-u^2)^2+4z^2u^2}\right)'}{(1-u^2)^2+4z^2u^2}$ $\frac{-K((1-u^2)^2+4z^2u^2)'}{2\sqrt{(1-u^2)^2+4z^2u^2}[(1-u^2)^2+4z^2u^2]} = 0$ $\frac{-K((1-u^2)^2+4z^2u^2)'}{2\sqrt{(1-u^2)^2+4z^2u^2}[(1-u^2)^2+4z^2u^2]} = 0$

$$\frac{-K[-4u(1-u^2)+8z^2u]}{2\sqrt{(1-u^2)^2+4z^2u^2}((1-u^2)^2+4z^2u^2)}=0$$

$$K[-4u(1-u^2)+8z^2u]=0$$

$$\Leftrightarrow 4u(1-u^2)-8z^2u=0$$

$$u\neq 0$$

$$\Leftrightarrow 1-u^2-2z^2=0 \Leftrightarrow u^2=1-2z^2$$

Si $\boldsymbol{z<\frac{\sqrt{2}}{2}}$; $u>0$

$$\Leftrightarrow u=\sqrt{1-2z^2}$$

$$\boldsymbol{\omega=\omega_0\sqrt{1-2z^2}}$$

Dans ce cas, il ne va pas y avoir de somme de tracés connus.

Si $z<\frac{\sqrt{2}}{2}$, on montre la présence d'un maximum de $|H(j\omega)|$ à la pulsation notée ω_r, pulsation à la résonnance

$$\omega_r=\omega_0\sqrt{1-2z^2}$$

Ce maximum vaut :

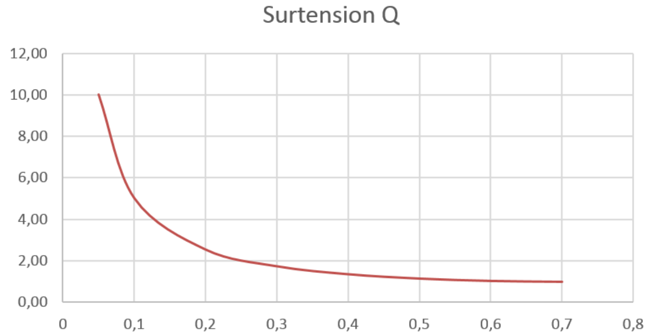
$$|H(j\omega_r)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1-(1-2z^2)\right)^2+4z^2(1-2z^2)}} = \frac{K}{\sqrt{4z^4+4z^2-8z^4}} = \frac{K}{\sqrt{4z^2-4z^4}} = \frac{K}{2z\sqrt{1-z^2}}$$

$$G_r=20\log\left(\frac{K}{2z\sqrt{1-z^2}}\right)$$

On définit le facteur de résonnance, ou facteur de surtension Q :

$$Q=\frac{|H(j\omega_r)|}{|H(0)|}=\frac{\frac{K}{2z\sqrt{1-z^2}}}{K}=\frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}}$$

Plus z est petit, plus ce facteur est grand, plus grande est la résonnance



Pour $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $Q=1$

Conclusions :

- Il existe une asymptote horizontale de valeur $G_0 = 20\log K$ en $\omega \to 0$
- Il existe une asymptote de pente $-40\ db/dec$ en $\omega \to \infty$
- Ces deux asymptotes se coupent à la pulsation $\omega = \omega_0$
- A cette pulsation, le gain réel est égal au gain maximal du système $G_0 = 20\log K$ moins $20\log(2z)$ db.
- Si $z \geq 1$, un 2° ordre se décompose en produit de deux 1° ordre dont les pulsations de coupure encadrent ω_0 : $min(\omega_1, \omega_2) < \omega_0 < max(\omega_1, \omega_2)$ et $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ si $z = 1$
- Si $z > 1$, il existe une troisième asymptote de pente $-20\ db/dec$ entre les pulsations de coupure de chaque premier ordre le constituant
- Si $z \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$, il existe une résonnance du gain à la pulsation de résonnance ω_r telle que

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2z^2} \quad ; \quad \begin{cases} \lim\limits_{z \to \frac{\sqrt{2}}{2}} \omega_r = 0 \\ \lim\limits_{z \to 0} \omega_r = \omega_0 \end{cases}$$

$$G_r = 20\log\left(\frac{K}{2z\sqrt{1-z^2}}\right)$$

  On montre en faisant plusieurs tracés que dans le cas $z < \frac{\sqrt{2}}{2}$, la courbe réelle du gain tend vers ses 2 asymptotes par le dessus. Toutefois, elle peut passer en dessous des asymptotes entre $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$
- On appelle pulsation de coupure à 0 db la pulsation à laquelle le gain est nul et on la note ω_{c_0}

$$\omega_{c_0} = \omega_0\sqrt{(1-2z^2) + \sqrt{(1-2z^2)^2 + (K^2-1)}}$$

- On appelle bande passante à 0 db notée BP_0 la plage de pulsations pour laquelle le gain est positif

$$BP_0 = [0; \omega_{c_0}]$$

• **Tracé du diagramme de Bode en gain**

Comme on l'a vu au paragraphe précédent, on va distinguer différents cas en fonction de z

$z > 1$

$$z = 10 \quad ; \quad H(p) = \frac{10}{1 + 2p + 0{,}01p^2}$$

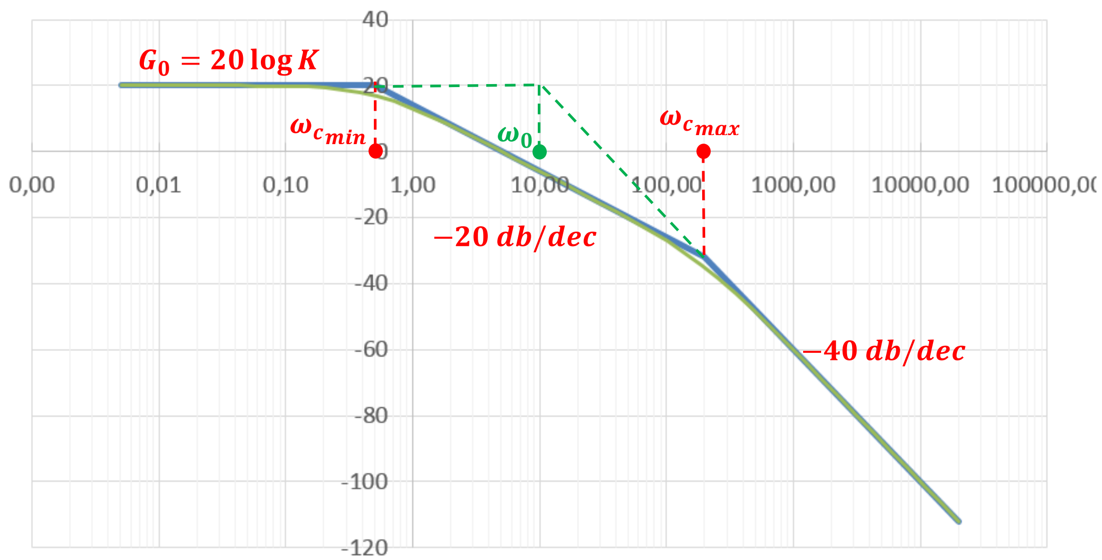
$$z > 1 \Rightarrow H(p) = \frac{10}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} = 10 \frac{1}{1 + T_1 p} \frac{1}{1 + T_2 p}$$

$$G = 20 + H_1(p) + H_2(p)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} \quad ; \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2}$$
$$min(\omega_1, \omega_2) < \omega_0 < max(\omega_1, \omega_2)$$

On peut tracer les diagrammes de Bode de deux 1° ordre et les sommer.
Sinon, on sait qu'il y a 3 asymptotes ainsi que leurs pentes et on sait où placer les cassures :

$$\begin{cases} T_1 = 0{,}01 \\ T_2 \approx 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \omega_{c_{min}} = \dfrac{1}{T_{max}} = 0{,}5 \\ \omega_{c_{max}} = \dfrac{1}{T_{min}} \approx 200 \end{cases}$$



$z = 1$

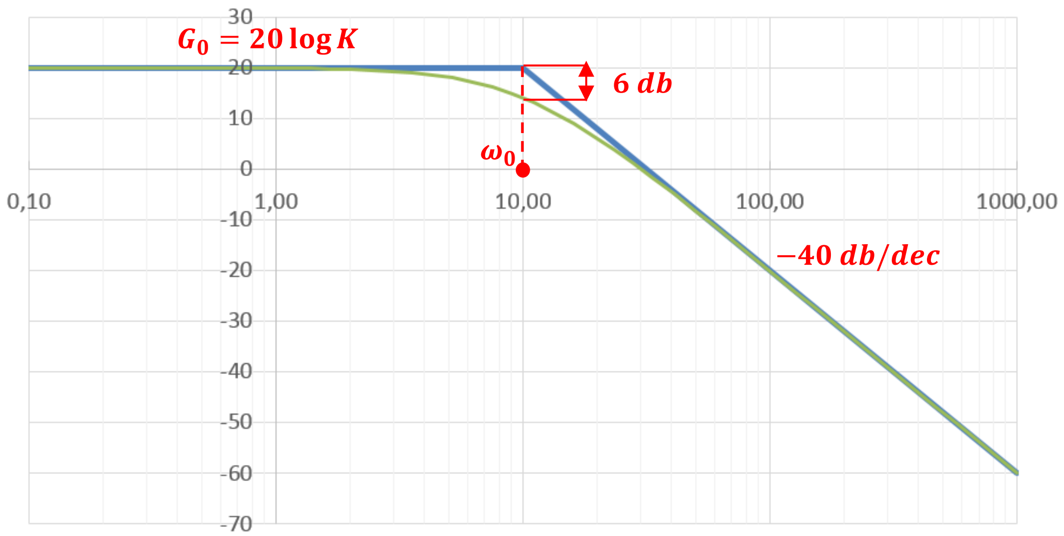
$$z = 1 \quad ; \quad H(p) = \frac{10}{1 + 0{,}2p + 0{,}01p^2}$$

$$z = 1 \Rightarrow H(p) = \frac{10}{(1 + Tp)^2} = 10 \frac{1}{1 + Tp} \frac{1}{1 + Tp}$$

$$G = 20 + H(p) + H(p)$$

On peut tracer les diagrammes de Bode de deux 1° ordre et les sommer.
Sinon, on sait qu'il y a 2 asymptotes ainsi que leurs pentes et on sait où placer la cassure :

$$T = 0{,}1 = \frac{1}{\omega_0} \quad ; \quad \omega_C = \omega_0 = 10$$



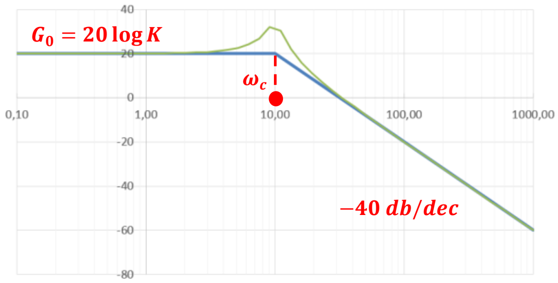
On a : $20 \log(2z) \approx 6$

<table>
<tr><th colspan="2">$z < 1$</th></tr>
<tr><td colspan="2">Dans ce cas, le dénominateur est non factorisable, on ne peut sommer deux 1° ordres</td></tr>
<tr><th>$0 < z < \frac{\sqrt{2}}{2}$</th><th>$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq z < 1$</th></tr>
<tr><td>

$$z = 0{,}1 \quad ; \quad H(p) = \frac{10}{1 + 0{,}02p + 0{,}01p^2}$$

$$T = 0{,}1 \quad ; \quad \omega_C = \omega_0 = 10$$

Présence de résonnance



$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2z^2} = 9{,}9$$
$$G_r = 20\log\left(\frac{K}{2z\sqrt{1 - z^2}}\right) \approx 34$$

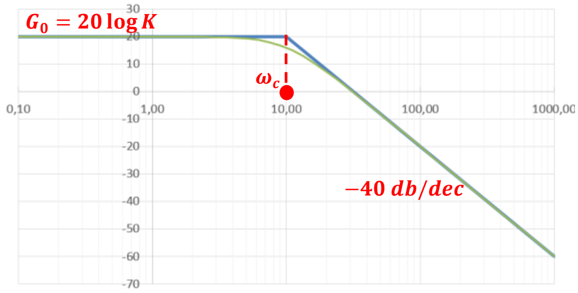
On a : $20\log(2z) \approx -14$

</td><td>

$$z = 0{,}8 \quad ; \quad H(p) = \frac{10}{1 + 0{,}16p + 0{,}01p^2}$$

$$T = 0{,}1 \quad ; \quad \omega_C = \omega_0 = 10$$

Pas de résonnance



On a : $20\log(2z) \approx 4$

</td></tr>
</table>

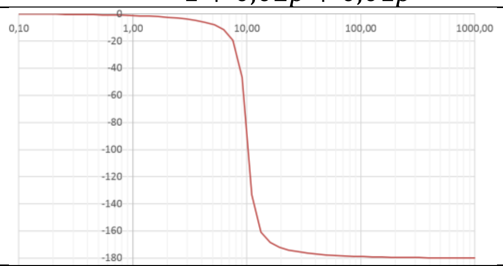
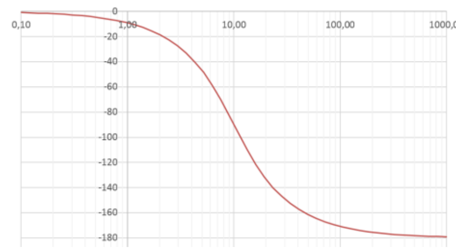
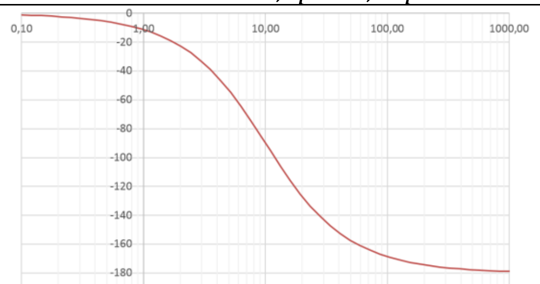
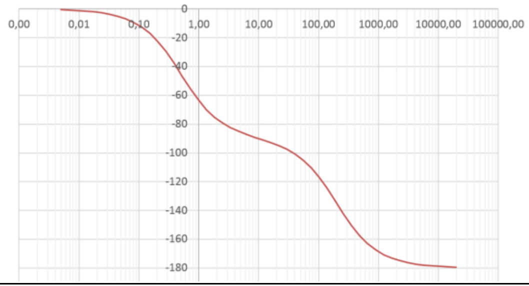
A.III.2.a.ii Etude de la phase

• **<u>Expression – Tracé – Observations</u>**

$$\boxed{\varphi = -\cos^{-1}\left(\frac{1-a\omega^2}{\sqrt{(1-a\omega^2)^2+(b\omega)^2}}\right)} \quad \textbf{2° ordre}$$

Attention : φ est exprimée en radians dans la fonction $s(t)$

Traçons φ en fonction de ω pour 4 valeurs de z : $\begin{cases} z_1 = 0{,}1 \\ z_2 = 0{,}8 \\ z_3 = 1 \\ z_4 = 10 \end{cases}$ et $\begin{cases} K = 10 \\ \omega_0 = 10 \end{cases}$

$z_1 = 0{,}1$ $H(p) = \frac{10}{1+0{,}02p+0{,}01p^2}$	$z_2 = 0{,}8$ $H(p) = \frac{10}{1+0{,}16p+0{,}01p^2}$
	
$z_3 = 1$ $H(p) = \frac{10}{1+0{,}2p+0{,}01p^2}$	$z_4 = 10$ $H(p) = \frac{10}{1+2p+0{,}01p^2}$
	

On remarque

- Une asymptote horizontale à la valeur de 0° lorsque $\omega \to 0$
- Une asymptote horizontale à la valeur $-180°$ lorsque $\omega \to +\infty$
- Un passage à la valeur de $-90°$ pour $\omega = \omega_0$
- Un changement de plus en plus rapide de la phase autour de $\omega = \omega_0$ lorsque z diminue
- Un comportement en « vague » lorsque $z > 1$

- **Caractéristiques de la phase**

$$\varphi = -\cos^{-1}\left(\frac{1-a\omega^2}{\sqrt{(1-a\omega^2)^2+(b\omega)^2}}\right)$$

$\omega \to 0 \to \log\omega \to -\infty$	$\omega \to +\infty \to \log\omega \to +\infty$
$\frac{1-a\omega^2}{\sqrt{(1-a\omega^2)^2+(b\omega)^2}} \underset{\omega\to 0}{\sim} 1$ $\varphi \underset{\omega\to 0}{\sim} 0 = \varphi_0$ Asymptote horizontale nulle	$\frac{1-a\omega^2}{\sqrt{(1-a\omega^2)^2+(b\omega)^2}} \underset{\omega\to 0}{\sim} -1$ $\varphi \underset{\omega\to +\infty}{\sim} -\pi = \varphi_\infty$ Asymptote horizontale à $-\pi$
Valeur en ω_0	
$\varphi(\omega_0) = -\cos^{-1}\left(\frac{1-\frac{1}{{\omega_0}^2}{\omega_0}^2}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{{\omega_0}^2}{\omega_0}^2\right)^2+\left(\frac{2z}{\omega_0}\omega_0\right)^2}}\right) = -\cos^{-1}(0) = -\frac{\pi}{2}$	

Lorsque$z \geq 1$, la phase présente une forme de « vague » ou d'escalier. Etudions ce comportement.

$z > 1$	$z = 1$
$H(p) = \frac{K}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$ $H(p) = K\frac{1}{1+T_1p}\frac{1}{1+T_2p}$ $H(p) = KH_1(p)H_2(p)$ $\omega_{c_1} \neq \omega_{c_2}$	$H(p) = \frac{K}{(1+Tp)^2}$ $H(p) = K\frac{1}{1+Tp}\frac{1}{1+Tp}$ $H(p) = KG(p)G(p)$ $\omega_{c_1} = \omega_{c_2}$
Dans ces deux cas, on reconnaît le produit de deux fonctions de transfert du 1° ordre dont on connaît le diagramme de Bode ainsi que d'une constante K Il suffit donc de sommer 2 courbes en phase : 2 systèmes du premier ordre	
$z > 1$	$z = 1$
Les deux tracés du 1° ordre ne sont pas superposés, il existe une nouvelle asymptote horizontale entre ω_{c_1} et ω_{c_2} de valeur $-90°$	Les deux tracés du 1° ordre sont superposés, il n'existe pas de zone transitoire particulière

• **Tracé du diagramme de Bode en phase**

Comme on l'a vu au paragraphe précédent, on va distinguer différents cas en fonction de z

$z > 1$

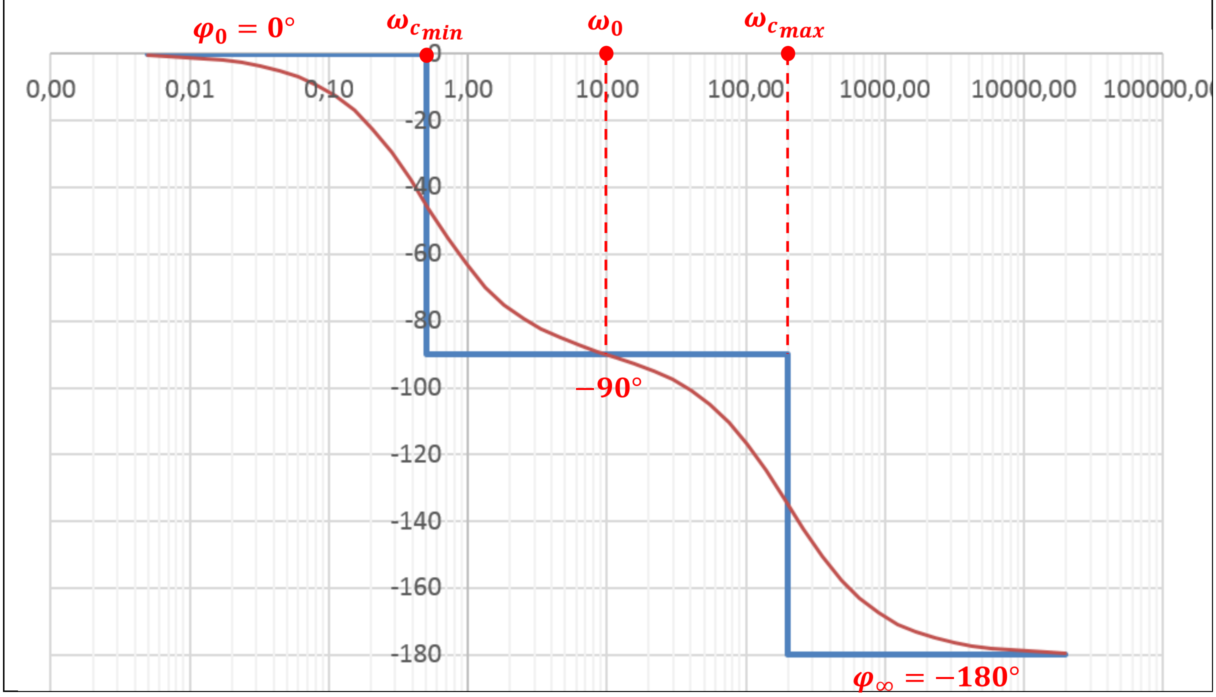
$$z = 10 \quad ; \quad H(p) = \frac{10}{1 + 2p + 0{,}01p^2}$$

$$z > 1 \Rightarrow H(p) = \frac{10}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} = 10 \frac{1}{1 + T_1 p} \frac{1}{1 + T_2 p}$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

On peut tracer les diagrammes de Bode de deux 1° ordre et les sommer.
Sinon, on sait qu'il y a 2 asymptotes horizontales et on sait où placer la cassure :

$$\begin{cases} T_1 = 0{,}01 \\ T_2 \approx 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \omega_{c_{min}} = \dfrac{1}{T_{max}} = 0{,}5 \\ \omega_{c_{max}} = \dfrac{1}{T_{min}} \approx 200 \end{cases}$$



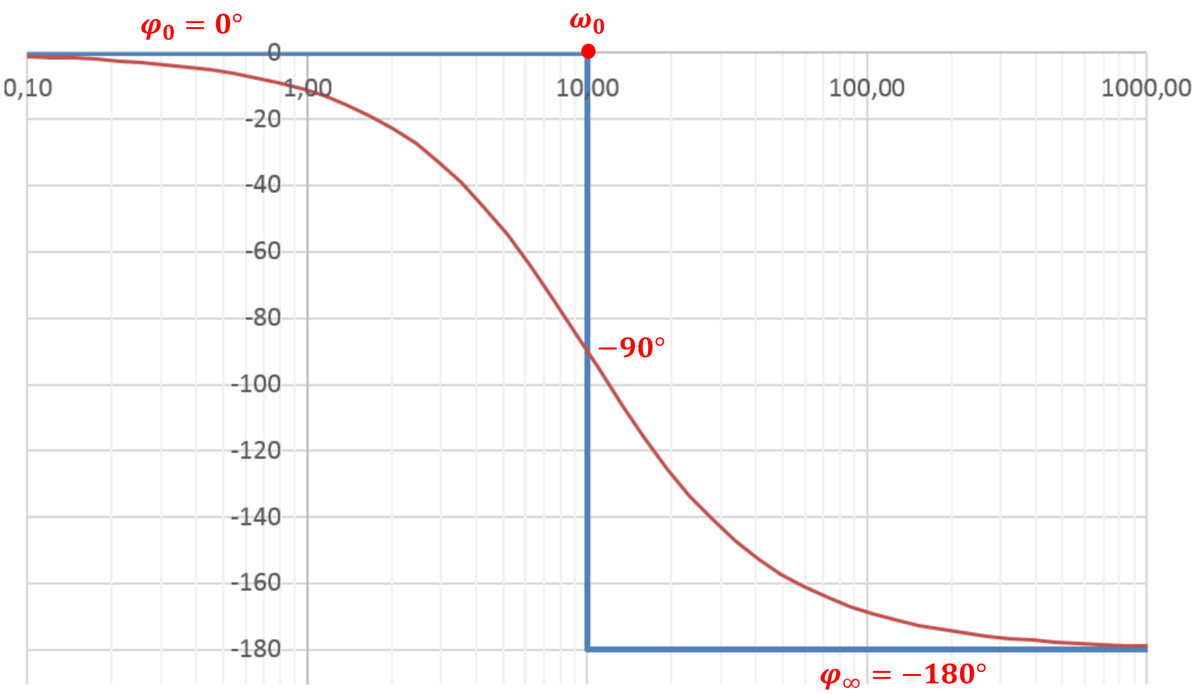
$z = 1$

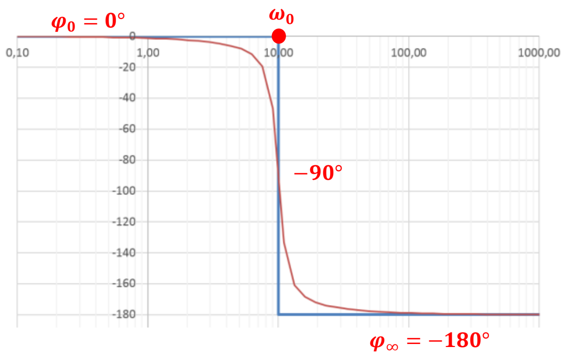
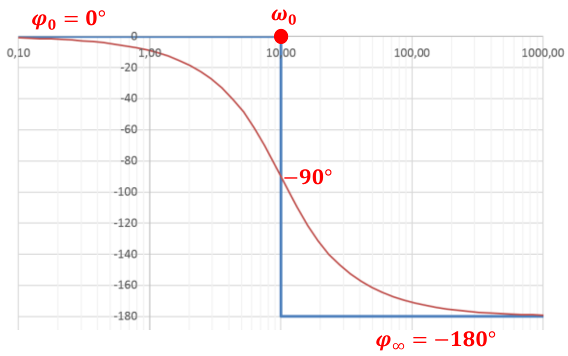
$$z = 1 \quad ; \quad H(p) = \frac{10}{1 + 0{,}2p + 0{,}01p^2}$$

$$z = 1 \Rightarrow H(p) = \frac{10}{(1 + Tp)^2} = 10\frac{1}{1 + Tp}\frac{1}{1 + Tp}$$

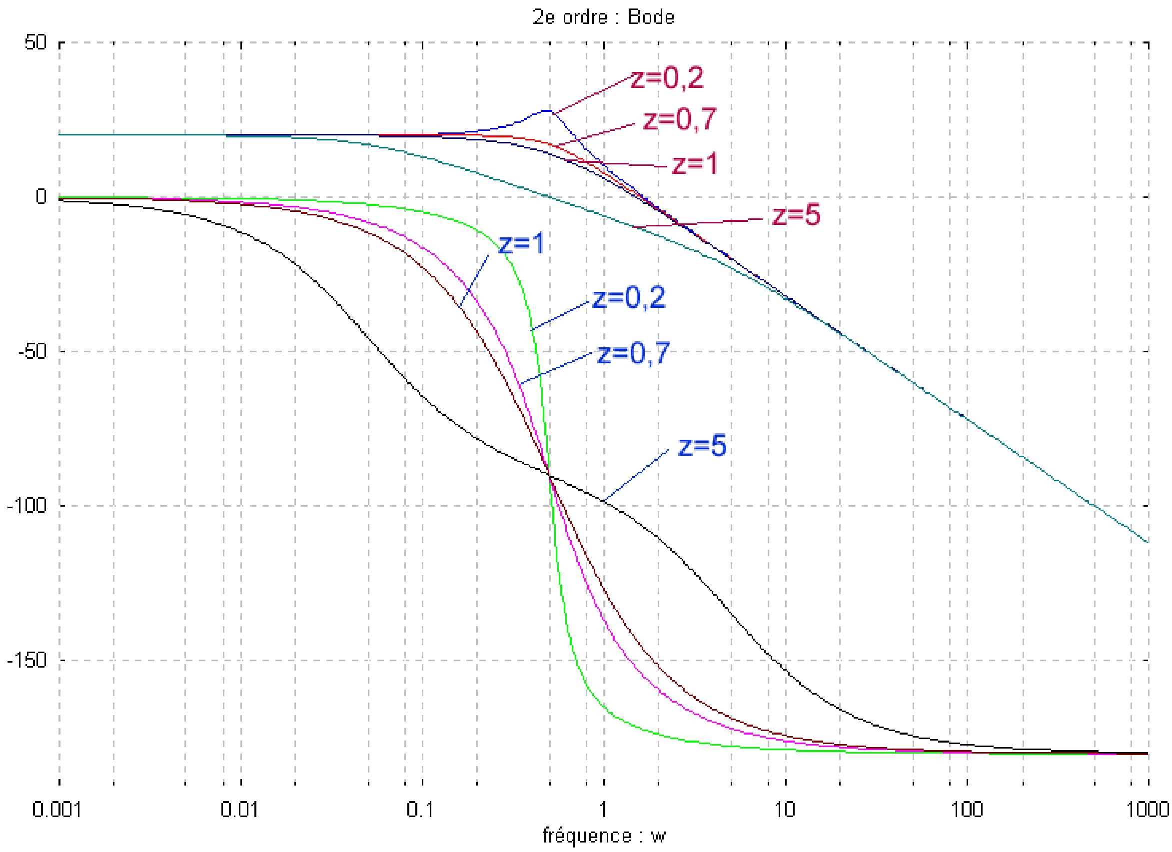
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_1$$

On peut tracer les diagrammes de Bode de deux 1° ordre et les sommer.
Sinon, on sait qu'il y a 2 asymptotes ainsi que leurs pentes et on sait où placer la cassure :



$z < 1$	
Dans ce cas, le dénominateur est non factorisable, on ne peut sommer deux 1° ordres	
$0 < z < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq z < 1$
$z = 0{,}1 \quad ; \quad H(p) = \frac{10}{1 + 0{,}02p + 0{,}01p^2}$	$z = 0{,}8 \quad ; \quad H(p) = \frac{10}{1 + 0{,}16p + 0{,}01p^2}$
	

A.III.2.a.iii Bilan



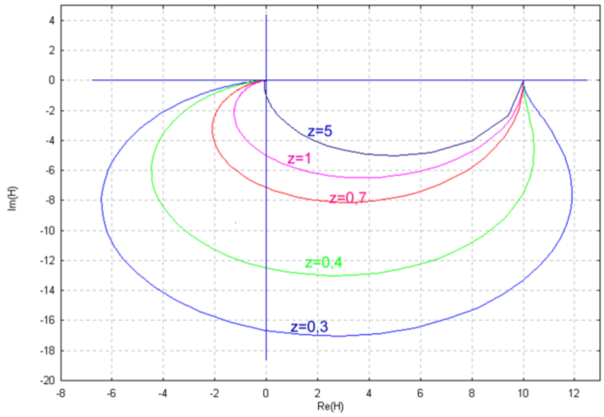
A.III.2.b Diagramme de Nyquist

On trace $H(j\omega)$ dans le plan complexe :

$$H(j\omega) = Re\big(H(j\omega)\big) + jIm\big(H(j\omega)\big)$$

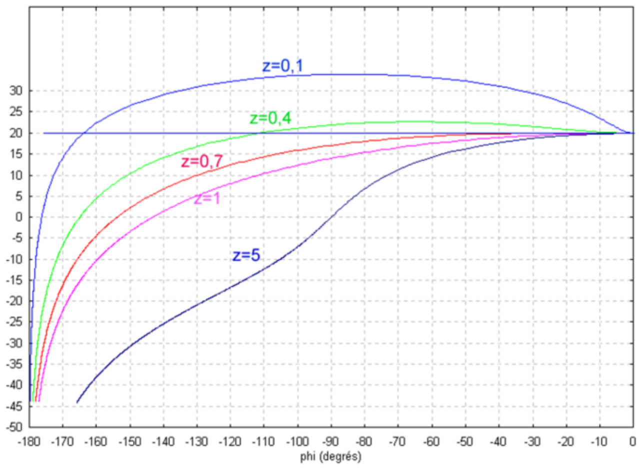
$$H(j\omega) = \frac{K}{(1-a\omega^2)+jb\omega} = \frac{K(1-a\omega^2)}{(1-a\omega^2)^2+(b\omega)^2} - j\frac{Kb\omega}{(1-a\omega^2)^2+(b\omega)^2} \quad ; \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{{\omega_0}^2} \\ b = \dfrac{2z}{\omega_0} \end{cases}$$

$\omega = 0$	$\omega \to +\infty$
$H(j\omega) \to K$	$H(j\omega) \to 0$



A.III.2.c Diagramme de Black

On trace une courbe paramétrée telle que φ soit en abscisse en degrés et G_{bd} soit en ordonnée



A.III.3 Utilisation du diagramme de Bode

A.III.3.a Cas général

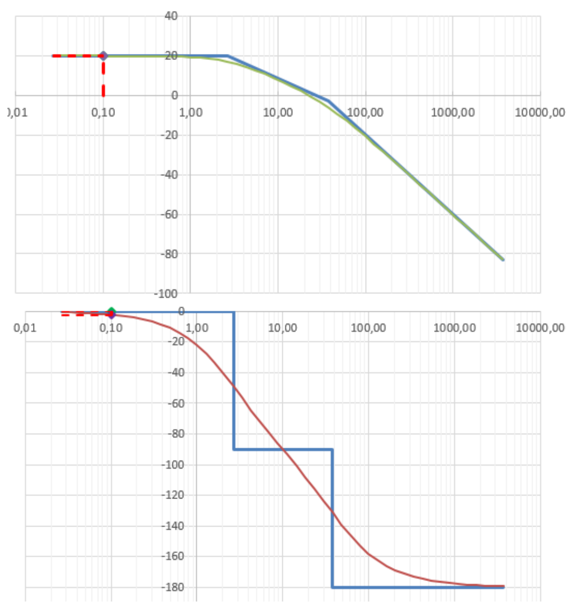
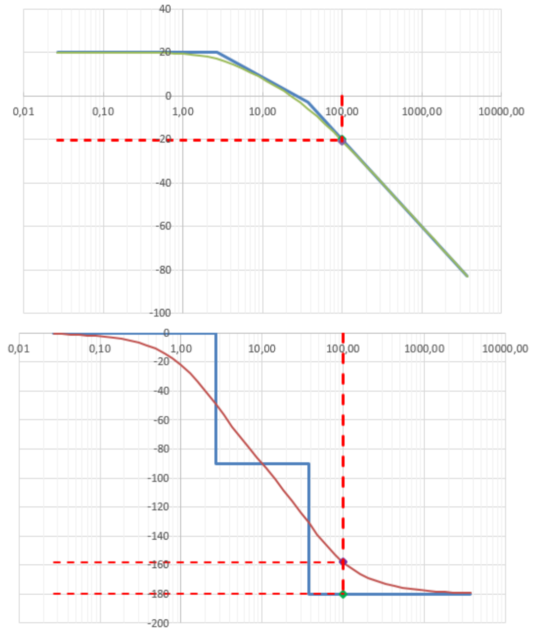
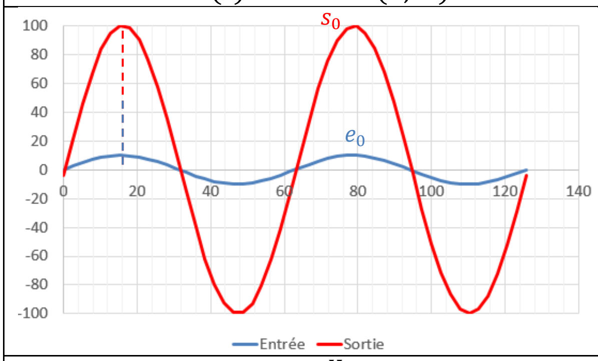
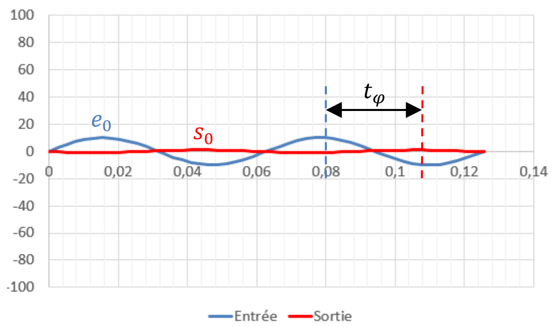
Rappelons qu'à l'entrée $e(t) = e_0 \sin \omega t \, u(t)$ correspond la sortie $s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi)\, u(t)$ avec

$$\begin{cases} s_0 = |H(j\omega)| e_0 \\ \varphi = \arg H(j\omega) \end{cases}$$

φ en radians

A.III.3.b Application

$$\boxed{H(p) = \frac{10}{1 + 0{,}4p + 0{,}01p^2}}$$

$e(t) = 10 \sin 0{,}1t$	$e(t) = 10 \sin 100t$
	
$\begin{cases} \lvert H(j\omega)\rvert \approx 10^{\frac{20}{20}} \approx 10 \\ \varphi \approx 0° \approx 0\, rd \end{cases}$ $\lvert t_\varphi \rvert = \frac{\lvert\varphi\rvert}{\omega} = 0\, s$	$\begin{cases} \lvert H(j\omega)\rvert \approx 10^{\frac{-20}{20}} \approx 0{,}1 \\ \varphi \approx -180° \approx -3{,}14\, rd \end{cases}$ $\lvert t_\varphi \rvert = \frac{\lvert\varphi\rvert}{\omega} = \frac{3{,}14}{100} = 0{,}0314\, s$
$s^{gr}(t) = 100 \sin(0{,}1t)$	$s^{gr}(t) = \sin(100t - 3{,}14)$
	
$\begin{cases} \lvert H(j\omega)\rvert = \frac{K}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} = 9{,}99 \\ \varphi = -\cos^{-1}\left(\frac{1 - a\omega^2}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}\right) = -0{,}04\, rd \end{cases}$ $\lvert t_\varphi \rvert = \frac{\lvert\varphi\rvert}{\omega} = \frac{0{,}04}{0{,}1} = 0{,}4\, s$	$\begin{cases} \lvert H(j\omega)\rvert = \frac{K}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} = 0{,}09 \\ \varphi = -\cos^{-1}\left(\frac{1 - a\omega^2}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}\right) = -2{,}76\, rd \end{cases}$ $\lvert t_\varphi \rvert = \frac{\lvert\varphi\rvert}{\omega} = \frac{2{,}76}{100} = 0{,}0276\, s$
$s^{gr}(t) = 99{,}9 \sin(0{,}1 - 0{,}04)$	$s^{gr}(t) = 0{,}9 \sin(100t - 2{,}76)$