A.II. Formalisme de Laplace

A.II.1 Contexte

De nombreux systèmes peuvent être modélisés, à partir des lois de la physique par un ensemble d'équations différentielles, éventuellement non linéaires.

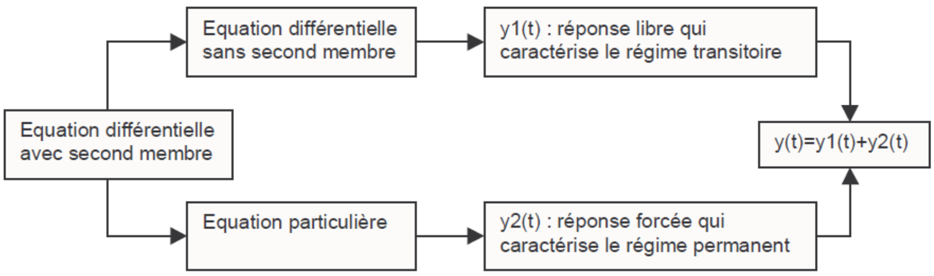
Considérons un système linéaire continu quelconque. Il est caractérisé par l'équation différentielle suivante (modèle):

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e \quad ; \quad m < n$$

Remarque :

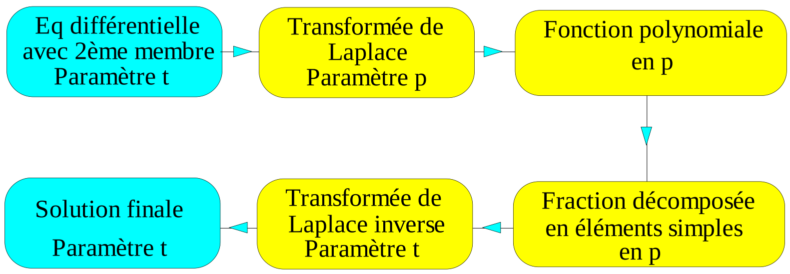
- par respect du principe de causalité abordé précédemment, m est obligatoirement inférieur à n.
  - C'est-à-dire que la variable de sortie s voit ses dérivées « pilotées » par une entrée dont le degré de la plus grande dérivée est inférieur, c'est-à-dire un phénomène physique pouvant s'y appliquer.
  - ex : d'après le principe fondamental de la dynamique appliqué à un solide projeté sur une direction $\vec{x}$: $\sum \vec{F}.\vec{x} = m\frac{dv_x}{dt}$. Cette équation traduit le fait que lorsque l'on impose un effort, on impose une variation de la vitesse du solide concerné. L'inverse est impossible, on ne peut physiquement imposer une vitesse qui induirait un effort. Cette équation montre que la donnée de sortie (vitesse) voit sa dérivée contrôlée par l'effort.

Pour résoudre cette équation et exprimer la sortie $s(t)$ en fonction de l'entrée $e(t)$, la première solution consiste à utiliser l'outil mathématique classique.



Pour des équations du premier et du second degré, ce travail est simple. Pour des équations plus complexes, cela devient plus difficile.

Nous allons donc introduire une nouvelle notion. En effet, un outil a été développé pour résoudre ces équations temporelles en passant dans un domaine appelé **domaine de Laplace**. En transformant l'équation différentielle dans ce domaine, en travaillant dans celui-ci sur des polynôme, puis en revenant dans le domaine temporel, il devient simple de trouver la solution à des équations complexes comme celle présentée ci-dessus.



A.II.2 Transformation de Laplace

A.II.2.a Définition

Soit f, une fonction réelle de la variable réelle t, définie pour $t > 0$.

On appelle transformée de Laplace de f, la fonction $F(p)$ définie par :

$$F(p) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$$

p est appelée variable complexe.

On notera $\mathcal{L}^{-1}$ la transformée de Laplace inverse : $\mathcal{L}^{-1}\big(F(p)\big) = f(t)$

Généralement, à une variable temporelle sera associée une lettre minuscule de l'alphabet.

La lettre majuscule sera alors automatiquement attribuée à la variable associée dans le domaine de Laplace

Exemples :

$$u(t) \to U(p)$$

$$x(t) \to X(p)$$

$$e(t) \to E(p)$$

$$s(t) \to S(p)$$

Remarque : En termes d'unités, la transformée de Laplace d'une fonction est une intégrale temporelle, elle multiplie dont par un temps.

$$F(p) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$$

$$[F(p)] = [f(t)] * T$$

Toutefois, lorsque dans un schéma bloc, on fait apparaître les unités, on écrira les unités des variables temporelles, les variables de Laplace étant elles toutes multipliées par un temps.

A.II.2.b Propriétés

A.II.2.b.i Unicité

La correspondance entre $f(t)$ et $F(p)$ est biunivoque. Il existe une bijection entre le domaine temporel et le domaine de Laplace.

A.II.2.b.ii Linéarité

Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions du temps. L'application $\mathcal{L}$ est linéaire :

$$\mathcal{L}\big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big) = \lambda \mathcal{L}\big(f(t)\big) + \mu \mathcal{L}\big(g(t)\big)$$

A.II.2.b.iii Image de la dérivée

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}\,dt$$

En faisant une intégration par parties : $\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = [f(t)e^{-pt}]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$$

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = -f(0^+) + pF(p)$$

Soit :

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = pF(p) - f(0^+)$$

Remarque :

En termes d'unités, on voit ici que $f(0^+)$ est de l'unité de la fonction temporelle $f(t)$

Comme une multiplication par p correspond à une dérivation temporelle, soit une division par un temps, on a :

$$[pF(p)] = \frac{[F(p)]}{T}$$

Par ailleurs, $[pF(p)] = [f(0^+)]$ puisque ces deux termes sont sommés, ce qui montre que

$$[F(p)] = [f(t)] * T$$

Lorsque nous traiterons des problèmes aux conditions initiales non nulles, il faudra pour comprendre les unités des variables manipulées ne pas oublier ce résultat.

Ce résultat se généralise aux dérivées d'ordre supérieur :

$$\mathcal{L}\big(f^n(t)\big) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \cdots - f^{n-1}(0^+)$$

Exemple :

$$\mathcal{L}\big(f''(t)\big) = p\mathcal{L}\big(f'(t)\big) - f'(0^+) = p\big(pF(p) - f(0^+)\big) - f'(0^+)$$

$$\mathcal{L}\big(f''(t)\big) = p^2 F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$$

Dans le cas où la fonction f ainsi que ses dérivées sont nulles à $t = 0$, on obtient le résultat fondamental :

$$\boxed{\begin{gathered}\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = pF(p) \\ \mathcal{L}\big(f''(t)\big) = p^2 F(p) \\ \dots \\ \mathcal{L}\big(f^n(t)\big) = p^n F(p)\end{gathered}}$$

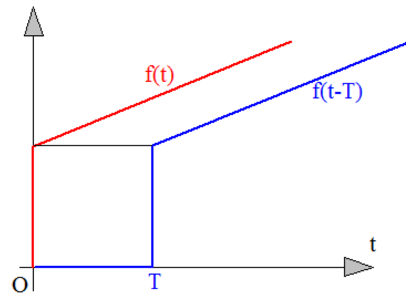
Ce cas se rencontre très fréquemment en asservissements et correspond à l'étude du comportement d'un système initialement au repos et soumis à une entrée causale, c'est-à-dire nulle pour t < 0.

Remarques :

- Nous pourrions montrer de la même manière qu'une intégration correspond à une division par p.
- Attention : écrire $\dot{F}(p)$ n'a pas de sens. Lorsque l'on veut parler de la transformée de la dérivée, il faut passer par la notation $\mathcal{L}\big(f'(t)\big)$

A.II.2.b.iv Théorème du retard

Soient $f(t)$ de transformée de Laplace $F(p)$ et $g(t)$ une fonction telle que $g(t) = f(t-T)$.



$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(f(t-T)) = G(p) = e^{-Tp}F(p)$$

Démonstration par changement de variable :

$$\mathcal{L}(g(t)) = \int_0^{+\infty} f(t-T)e^{-pt}\,dt \underset{u=t-T}{=} \int_{-T}^{+\infty} f(u)e^{-p(u+T)}\,du$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(f(t-T)) = e^{-pT}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}\,du = e^{-pT}F(p)$$

A.II.2.b.v Théorèmes de la valeur initiale et finale

• **Théorèmes**

Ces théorèmes sont d'une grande utilité car ils permettent de connaître la limite temporelle d'une fonction connaissant sa transformée de Laplace.

Théorème de la valeur initiale	Théorème de la valeur finale
$\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{p\to +\infty} pF(p)$	$\lim\limits_{t\to +\infty} f(t) = \lim\limits_{p\to 0^+} pF(p)$

Remarque : Parler d'une valeur finale n'a de sens que si le système est stable, c'est-à-dire si la sortie tend vers une valeur stable. Vous verrez au cours de votre scolarité que cette condition de stabilité est associée à la condition suivante :

Un système est stable si tous les pôles (racines du dénominateur) de sa fonction de transfert qui est une fraction rationnelle ont leur partie réelle négative.

• **Applications**

Nous verrons bientôt que ces théorèmes permettent d'écrire une limite en p sur un quotient de polynômes au lieu de déterminer la limite de fonctions temporelles.

Pour calculer ces limites, il faut aborder la notion d'équivalents. Appelons $Q_{eq}(p)$ l'équivalent d'un quotient de polynômes $Q(p)$.

On note :

$$Q(p) \underset{0^+}{\sim} Q_{eq}^{0^+}(p)$$

$$Q(p) \underset{+\infty}{\sim} Q_{eq}^{+\infty}(p)$$

Connaissant cet équivalent, on aura alors :

$$\lim_{p \to 0^+} Q(p) = \lim_{p \to 0^+} Q_{eq}^{0^+}(p)$$

$$\lim_{p \to +\infty} Q(p) = \lim_{p \to +\infty} Q_{eq}^{+\infty}(p)$$

Nous admettrons qu'un quotient de polynômes est équivalent :

- En l'infini, au quotient du terme de plus haut degré du numérateur sur le terme de plus haut degré du dénominateur
- En zéro, au quotient du terme de plus bas degré du numérateur sur le terme de plus bas degré du dénominateur

$$\frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0} \underset{0^+}{\sim} \frac{b_0}{a_0}$$

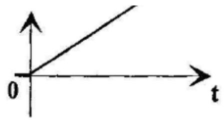
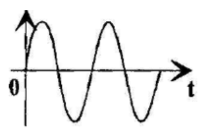
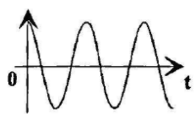
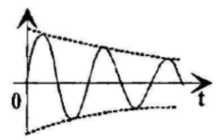
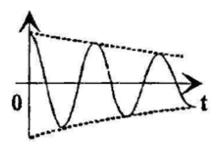
$$\frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0} \underset{+\infty}{\sim} \frac{b_m p^m}{a_n p^n} = \frac{b_m}{a_n} p^{m-n}$$

Exemple :

$$\lim_{p \to 0^+} \frac{p^3 + 2p^2 + p + 2}{2p^4 + 3p^2 + 5p + 1} = \lim_{p \to 0^+} 2 = 2$$

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{p^3 + 2p^2 + p + 2}{2p^4 + 3p^2 + 5p + 1} = \lim_{p \to +\infty} \frac{p^3}{2p^4} = \lim_{p \to +\infty} \frac{1}{2p} = 0$$

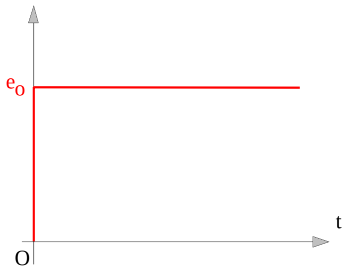
A.II.2.c Transformées usuelles

Allure	Fonction $f(t)$	Transformée de Laplace $F(p)=\mathcal{L}(f(t))$	Pôles de $F(p)$
	$t \to \delta(t)$ Impulsion de DIRAC	1	RAS
	$t \to f(t) = \boldsymbol{u(t)}$ Echelon unitaire	$F(p) = \frac{1}{p}$	0
	$t \to f(t) = tu(t)$ Rampe	$F(p) = \frac{1}{p^2}$	0 *Double*
	$t \to f(t) = t^n u(t)$ Fonction puissance	$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$	0 *D'ordre* $n+1$
	$t \to f(t) = e^{-at}u(t)$ Exponentielle	$F(p) = \frac{1}{p+a}$	$-a$
	$t \to f(t) = te^{-at}u(t)$ $t \to f(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)} e^{-at}u(t)$	$F(p) = \frac{1}{(p+a)^2}$ $F(p) = \frac{1}{(p+a)^n}$	$-a$ *Multiple*
	$t \to f(t) = \sin \omega t \, u(t)$ Sinus	$F(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\pm j\omega$
	$t \to f(t) = \cos \omega t \, u(t)$ Cosinus	$F(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\pm j\omega$
	$t \to f(t) = e^{-at} \sin \omega t \, u(t)$ Sinus amorti $t \to f(t) = ???$	$F(p) = \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$ $F(p) = \frac{\omega}{[(p+a)^2+\omega^2]^n}$	$-a \pm j\omega$ *Multiple*
	$t \to f(t) = e^{-at} \cos \omega t \, u(t)$ Cosinus amorti $t \to f(t) = ???$	$F(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$ $F(p) = \frac{p+a}{[(p+a)^2+\omega^2]^n}$	$-a \pm j\omega$ *Multiple*

$t \to f(t)$	$F(p)$
$t \to f'(t)$	$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = pF(p) - f(0^+)$
$t \to f''(t)$	$\mathcal{L}\big(f''(t)\big) = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$
$\begin{cases} t \to f'(t) \\ f(0^+) = 0 \end{cases}$	$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = pF(p)$
....	....
$t \to f^{(n)}(t)$	$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = p^nF(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)$
$\begin{cases} t \to f^{(n)}(t) \\ f(0^+) = 0 \\ \dots \\ f^{(n-1)}(0^+) = 0 \end{cases}$	$\mathcal{L}\big(f^n(t)\big) = p^nF(p)$
$\begin{cases} t \to \displaystyle\int_0^t f(t)dt = f_p(t) \\ f_p(0^+) = 0 \end{cases}$ f_p primitive de f	$\mathcal{L}\left(\displaystyle\int_0^t f(t)dt\right) = \dfrac{F(p)}{p}$
$t \to t^nf(t)$	$\mathcal{L}\big(t^nf(t)\big) = (-1)^nF^{(n)}(p)$
$t \to e^{-at}f(t)$	$\mathcal{L}\big(e^{-at}f(t)\big) = F(p+a)$
Théorème du retard	$\mathcal{L}\big(f(t-T)\big) = e^{-Tp}F(p)$
Théorème de la valeur finale	$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{p\to 0^+} pF(p)$
Théorème de la valeur initiale	$\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{p\to+\infty} pF(p)$
Equivalents $Q(p) \underset{0^+}{\sim} Q_{eq}^{0^+}(p)$ $Q(p) \underset{+\infty}{\sim} Q_{eq}^{+\infty}(p)$ $\lim\limits_{p\to 0^+} Q(p) = \lim\limits_{p\to 0^+} Q_{eq}^{0^+}(p)$ $\lim\limits_{p\to+\infty} Q(p) = \lim\limits_{p\to+\infty} Q_{eq}^{+\infty}(p)$	$\dfrac{b_mp^m + \cdots + b_1p + b_0}{a_np^n + \cdots + a_1p + a_0} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{b_0}{a_0}$ $\dfrac{b_mp^m + \cdots + b_1p + b_0}{a_np^n + \cdots + a_1p + a_0} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{b_mp^m}{a_np^n} = \dfrac{b_m}{a_n}p^{m-n}$

A.II.2.d Exemple de calcul de transformée de Laplace

A.II.2.d.i Echelon



$$f(t) = e_0 u(t)$$

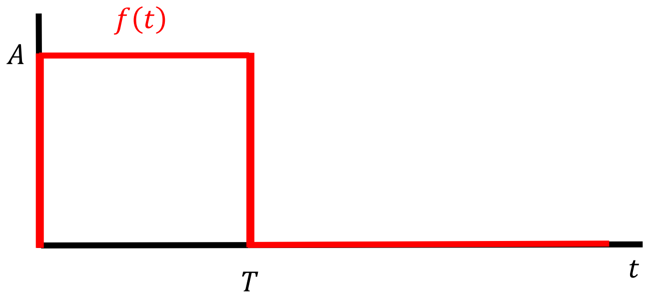
$$F(p) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e_0 u(t)e^{-pt}\,dt = e_0 \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt = e_0\left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^{+\infty} = -\frac{e_0}{p}\left(\lim_{t\to+\infty} e^{-pt} - e^0\right)$$

$$F(p) = \frac{e_0}{p}$$

A.II.2.d.ii Signal issu de signaux usuels

Soit le signal suivant :



$$f(t) = \begin{cases} A \; si \; t \in [0;T] \\ 0 \; si \; t > T \end{cases}$$

Pour déterminer sa transformée de Laplace

- soit on calcul l'intégrale complète :

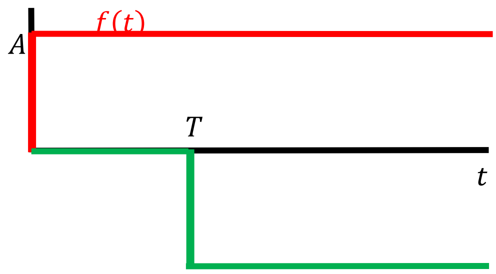
$$F(p) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$$

$$F(p) = \int_0^{T} f(t)e^{-pt}\,dt + \int_T^{++\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$$

$$F(p) = A\int_0^{T} e^{-pt}\,dt = A\left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^{T}$$

$$F(p) = \frac{A}{p}\left(1 - e^{-pT}\right)$$

- Soit on reconnaît la somme de deux signaux usuels : Un échelon normal et un échelon inversé et retardé de T



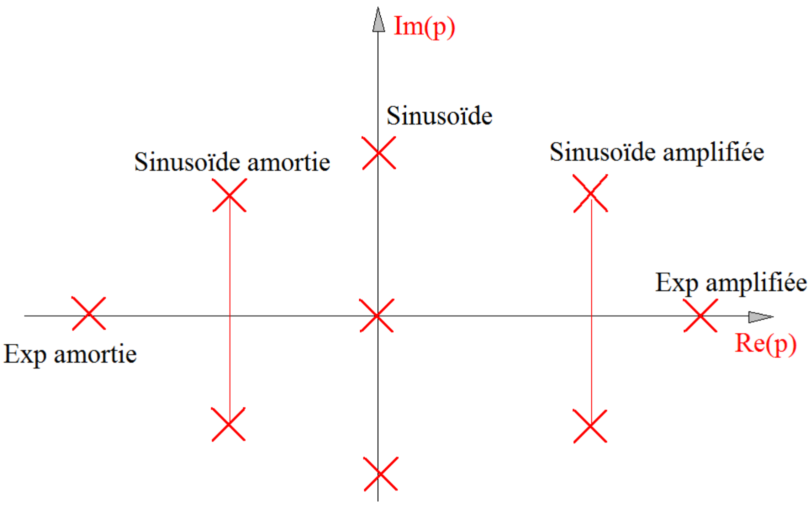
$$g(t) = Au(t)$$
$$f(t) = g(t) - g(t - T)$$

$$F(p) = \frac{A}{p} - \frac{A}{p}e^{-pT} = \frac{A}{p}(1 - e^{-pT})$$

A.II.2.e Fonction de transfert et allure réelle

Connaissant l'expression dans le domaine de Laplace d'une fonction $F(p)$, le graphique suivant donne la forme de cette fonction dans le domaine temporel $f(t)$.

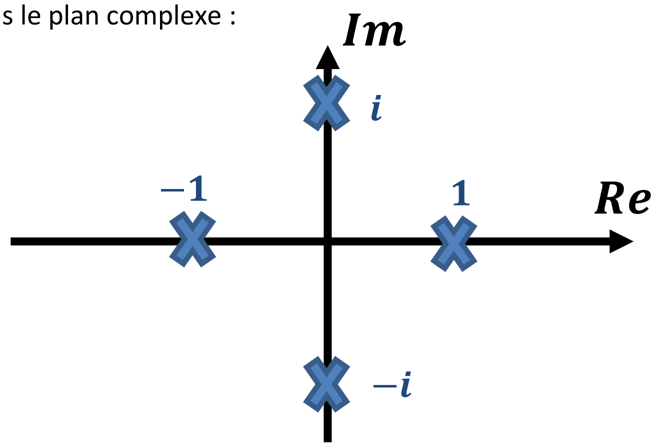
On représente dans le plan complexe les différents pôles de la fonction de transfert $F(p)$ d'une fonction temporelle $f(t)$ et on sait quelle est la forme de la fonction temporelle concernée.



Exemple : Soit

$$F(p) = \frac{10}{p^4 - 1}$$

Les pôles de $F(p)$ sont $(-1,1,-i,i)$. En utilisant le schéma ci-dessus, on place à l'aide de croix les différents pôles de F dans le plan complexe :



On sait donc que $f(t)$ sera composée des fonctions :

Exponentielle amortie – Exponentielle amplifiée – 2 Sinusoïdes

Preuve : (cf décomposition en éléments simples vue au paragraphe suivant)

$$F(p) = \frac{10}{(p^2-1)(p^2+1)} = \frac{10}{(p+1)(p-1)(p^2+1)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+1}$$

$$f(t) = u(t)[Ae^{-t} + Be^{t} + C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)]$$

A.II.2.f Résolution d'équations différentielles

A.II.2.f.i Méthode

Données :

- Equation différentielle :
$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$
- Entrée temporelle du système $e(t)$ donnée
- Conditions initiales données (nulles ?)

Objectif : Recherche de la réponse temporelle du système $s(t)$

Démarche :

- Traduction de l'équation différentielle dans le domaine de Laplace
- Calcul de la fonction de transfert $H(p)$
- Calcul de l'entrée dans le domaine de Laplace $E(p)$
- Détermination de la fraction rationnelle de polynômes correspondant à la sortie $S(p)$
- Décomposition du polynôme en éléments simples
- Détermination de la sortie temporelle $s(t)$ par transformation de Laplace inverse des éléments simples à l'aide du tableau des transformées (il est utile de regarder les dénominateurs des fonctions de transfert afin de trouver les transformées de Laplace associées

A.II.2.f.ii Décomposition en éléments simples

• **<u>Démarche</u>**

Faisons ici quelques rappels sur la décomposition en éléments simples.

Tout polynôme de $R[X]$ se décompose de manière unique en un produit de la forme :

$$B(X) = a(X - r_1)^{m_1} \dots (X - r_m)^{m_p}(X^2 + b_1 X + c_1)^{n_1} \dots \left(X^2 + b_q X + c_q\right)^{n_q}$$

Remarque : dans le domaine complexe, on peut se ramener à un produit de polynômes de degré 1 en utilisant les racines complexes conjuguées r_i^c et $\overline{r_i^c}$:

$$B(X) = a(X - r_1)^{m_1} \dots (X - r_m)^{m_p}\left[(X - r_1^c)\left(X - \overline{r_1^c}\right)\right]^{n_1} \dots \left[\left(X - r_q^c\right)\left(X - \overline{r_q^c}\right)\right]^{n_q}$$

Dans le domaine réel, on a ainsi un produit de :

- Polynômes d'ordre 1
- Polynômes d'ordre 2 non factorisables en produit de polynômes d'ordre 1 (discriminent strictement négatif)

Soit une fraction rationnelle $\frac{R(X)}{B(X)}$ telle que : $\deg R < \deg B$

Dans les systèmes causaux, on a toujours cette condition.

Alors :

$$\frac{R(X)}{B(X)} = \frac{R(X)}{a(X-r_1)^{m_1} \dots (X-r_m)^{m_p}(X^2+b_1X+c_1)^{n_1} \dots \left(X^2+b_qX+c_q\right)^{n_q}}$$

$$\frac{R(X)}{B(X)} = \sum_i \sum_k \frac{A_{ik}}{(X-r_i)^k} + \sum_j \sum_k \frac{B_{jk}x + C_{jk}}{\left(X^2+b_jX+c_j\right)^k}$$

La détermination des coefficients A_{ik}, B_{jk}, C_{jk} effectuée en :

- (Méthode 1) Soit en mettant la somme ci-dessus au même dénominateur puis en égalisant les termes de même degré afin d'obtenir un système d'équations à résoudre. Cette méthode fonctionne sans difficultés particulières, mais est assez longue à mettre en œuvre.
- (Méthode 2) Soit en effectuant des opérations sur les deux termes de l'égalité (multiplication par un terme bien choisi, dérivations …) et en prenant des valeurs particulières de x, en étudiant des limites… Cette méthode est extrêmement simple si le dénominateur est un produit de polynômes de degré
    - 1 : $\prod(x-x_i)$
    - n : $(x-x_i)^n$ où n est le degré maximum associé à la racine x_i

  mais se complique s'il existe des termes
    - $(x-x_i)^n$ (n inférieur au degré maximal de la racine x_i)
    - de degré 2 à racines imaginaires (ax^2+bx+c). Nous ne traiterons que le cas simple dans ce cours.
- (Méthode 3) Soit en créant autant d'équations que de paramètres à déterminer pour des valeurs quelconques de p qui ne sont pas des zéros de la fonction de transfert pour lesquels elle n'est pas définie

Remarque : pour les fractions rationnelles faisant apparaître les deux types de termes, il sera toujours possible de déterminer les constantes associées aux termes simples par la méthode 2 puis d'utiliser la méthode 1 où 3 pour déterminer les autres, la méthode 3 étant très pratique s'il ne reste qu'un terme à déterminer

• Exemple 1 : forme d'une décomposition

Donner la forme de la décomposition en éléments simples de $\frac{x^3-21x-7}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)}$

On sait qu'on peut écrire l'égalité suivante :

$$\frac{x^3-21x-7}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x+2)} + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+x+1)}$$

• Exemple 2 : détermination des coefficients par 2 méthodes

Prenons un exemple un peu plus simple : déterminer les coefficients A_1, B_1 et C_1

$$\frac{x^2-6x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+x+1)}$$

Méthode 1 : même dénominateur

$$\frac{x^2-6x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A_1x^2+A_1x+A_1}{(x-1)(x^2+x+1)}+\frac{B_1x^2+C_1x-B_1x-C_1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\frac{x^2-6x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{(A_1+B_1)x^2+(A_1+C_1-B_1)x+(A_1-C_1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Soit

$$\begin{cases} A_1+B_1=1 \\ A_1+C_1-B_1=-6 \\ A_1-C_1=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1=1-B_1 \\ 1-B_1+C_1-B_1=-6 \\ C_1=A_1+1=1-B_1+1=2-B_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1=1-B_1 \\ 1-B_1+2-B_1-B_1=-6 \\ C_1=2-B_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1=1-B_1 \\ 3-3B_1=-6 \\ C_1=2-B_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1=1-B_1=-2 \\ B_1=2+1=3 \\ C_1=2-B_1=-1 \end{cases}$$

$$\frac{x^2-6x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{-2}{(x-1)}+\frac{3x-1}{(x^2+x+1)}$$

Méthode 2 : Astuces, dans les cas simples avec uniquement des termes en $(x-a)$, fonctionne bien…

$$\frac{x^2-6x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A_1}{(x-1)}+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+x+1)}$$

Multiplions les deux termes de l'égalité par $(x-1)$

$$\frac{x^2-6x-1}{(x^2+x+1)}=A_1+(x-1)\frac{B_1x+C_1}{(x^2+x+1)}$$

Prenons la valeur particulière où $x=1$

$$\frac{1-6-1}{(1+1+1)}=A_1+(1-1)\frac{B_1*1+C_1}{(1+1+1)}$$

$$A_1=-2$$

En réalité, nous ne devrions pas parler de la valeur en $x = 1$ car la fonction que nous avons multiplié par $(x - 1)$ n'est pas définie en $x = 1$. Pour être rigoureux mathématiquement (bien que le résultat soit le même car nos fonctions multipliées sont prolongeables par continuité), il faut écrire :

$$A_1 = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 6x - 1}{(x^2 + x + 1)} = -2$$

Ou, d'une manière générale, pour tout pôle a d'ordre 1 d'une fonction $H(x) = \frac{P_1(x)}{(x-a)P_2(x)} = H'(x) + \frac{A}{(x-a)}$ où $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont des polynômes de x :

$$A = \lim_{x \to a} [(x - a)H(x)] = \lim_{x \to a} \left[\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\right]$$

En effet :

$$\lim_{x \to a} [(x - a)H(x)] = \lim_{x \to a} \left[(x - a)\left(H'(x) + \frac{A}{(x - a)}\right)\right] = \lim_{x \to a} [(x - a)H'(x) + A] = A$$

$$(x - a)H(x) = (x - a)\frac{P_1(x)}{(x - a)P_2(x)} = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$$

Ensuite, les choses se complique un peu : une multiplication par $\boldsymbol{(x^2 + x + 1)}$ ne vas pas permettre de prendre une racine réelle. Il faut donc passer par les complexes :

$$\frac{x^2 - 6x - 1}{(x - 1)} = \frac{A_1}{(x - 1)}(x^2 + x + 1) + B_1 x + C_1$$

Soit x_1 et x_2 les racines de $x^2 + x + 1$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

On obtient un système

$$\begin{cases} \dfrac{{x_1}^2 - 6x_1 - 1}{(x_1 - 1)} = B_1 x_1 + C_1 \\ \dfrac{{x_2}^2 - 6x_2 - 1}{(x_2 - 1)} = B_1 x_2 + C_1 \end{cases}$$

Nous n'irons pas plus loin… Ce n'est pas notre objectif, ces méthodes seront vues en mathématiques.

Dans ce cas, on utilise le résultat pour A_1, soit :

$$\frac{x^2 - 6x - 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{3}{(x - 1)} + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + x + 1)}$$

Puis on applique la méthode 1 (même dénominateur) ou 3 (valeurs quelconques de x) avec maintenant uniquement deux variables à déterminer. La méthode 3 est très pratique lorsqu'il ne reste qu'une variable à déterminer.

Remarque : Lors que l'on a un terme du type $\frac{A_n}{(x-1)^n}, n \geq 2$, ce n'est plus aussi simple :

$$\frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-1)^n}$$

Il n'y a que la multiplication par $(x-1)^n$ qui permet de déterminer A_n en $x = 1$, pour les multiplications par $(x-1)^i, i < n$ ilrestera des termes $(x-1)^{n-i}$ aux dénominateurs qui ne permettent de prendre des valeurs particulières en $x = 1$

Bilan : on peut grâce à cette méthode déterminer très simplement tous les termes en $(x - x_i)^n$ lorsque n est le degré maximum de la racine x_i.

• **Erreur à ne pas faire**

Soit la fraction suivante :

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 1}$$

Pour proposer la forme de sa décomposition en éléments simples, il faut être sûr que les polynômes au dénominateur sont d'ordre 1 ou d'ordre 2 à discriminent strictement négatif. Sinon, il faut les factoriser en produit de polynômes d'ordre 1.

$\cancel{\frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - 2x + 1}}$	$\frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2}$

A.II.2.f.iii Applications de transformations de Laplace inverses

• **Application 1 : transformée de Laplace inverse (TLI) simple**

Soit la fonction de transfert d'une fonction $s(t)$:

$$S(p) = \frac{1}{p-1} + \frac{4}{p+2}$$

On reconnaît le terme $\frac{1}{p+a}$ qui est la transformée de laplace de $e^{-at}u(t)$

On a donc :

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-1} + \frac{4}{p+2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+(-1)}\right) + 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+2}\right) = (e^t + 4e^{-2t})u(t)$$

• **Application 2 : TLI avec polynôme de degré 2 simple au dénominateur**

Soit la fonction de transfert d'une fonction $s(t)$:

$$S(p) = \frac{3p-2}{p^2+2p+2}$$

Méthode classique : Passer par les réels

Dans un premier temps, il est nécessaire de faire disparaître le polynôme de degré 2 du dénominateur sous cette forme en le factorisant sous forme canonique afin de reconnaître l'une des fonctions du tableau des transformées de Laplace :

$$p^2+2p+2 = (p+1)^2+1$$

Forme canonique d'un polynôme

$$f(x) = ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2+\beta$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad ; \quad \beta = f(\alpha)$$

On a donc :

$$S(p) = \frac{3p-2}{(p+1)^2+1}$$

On voit ici que l'on fait apparaître des fonctions qui ressemblent à des fonctions du tableau des transformées de Laplace :

$$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2} \quad ; \quad \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$$

Il reste donc à effectuer des transformations, judicieuses, permettant de se rapporter à ces exemples :

$$S(p) = \frac{3(p+1)-5}{(p+1)^2+1^2}$$

$$S(p) = 3\frac{(p+1)}{(p+1)^2+1^2} - 5\frac{1}{(p+1)^2+1^2}$$

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(3\frac{(p+1)}{(p+1)^2+1^2} - 5\frac{1}{(p+1)^2+1^2}\right)$$

$$s(t) = [3e^{-t}\cos(t) - 5e^{-t}\sin(t)]\,u(t)$$

Méthode complexe : Passer par les complexes

Pour les polynômes irréductibles au dénominateur, le passage par les complexes fonctionne aussi bien :

$$\left[\left(p-a_j\right)^2+{b_j}^2\right]=\left[\left[p-\left(a_j+ib_j\right)\right]\left[p-\left(a_j-ib_j\right)\right]\right]$$

Prenons un exemple simple :

$$S(p)=\frac{3}{p^2-p+1}$$

Méthode classique à l'aide du tableau des transformées de Laplace :

$$S(p)=\frac{3}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=2\sqrt{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \quad ; \quad s(t)=2\sqrt{3}e^{\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Méthode par éléments simples complexes d'ordre 1:

$$\Delta=1-4=-3 \quad ; \quad \begin{cases} p_1=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}} \\ p_2=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

$$S(p)=\frac{3}{p^2-p+1}=\frac{3}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}$$

$$S(p)=\frac{A}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}+\frac{B}{\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}=\frac{\left(Ap-Ae^{-i\frac{\pi}{3}}\right)+\left(Bp-Be^{i\frac{\pi}{3}}\right)}{(p+1)^2+1}=\frac{(A+B)p-\left(Ae^{-i\frac{\pi}{3}}+Be^{i\frac{\pi}{3}}\right)}{(p+1)^2+1}$$

Soit :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -\left(Ae^{-i\frac{\pi}{3}}+Be^{i\frac{\pi}{3}}\right)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ \left(-Be^{-i\frac{\pi}{3}}+Be^{i\frac{\pi}{3}}\right)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ B\left(e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=-\sqrt{3}i \\ B=\dfrac{-3}{2i\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{-3}{2i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{3i}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}i \end{cases}$$

Finalement, on a :

$$S(p)=\frac{-\sqrt{3}i}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}+\frac{\sqrt{3}i}{\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}$$

Vérifions qu'il n'y a pas d'erreurs :

$$S(p) = -\sqrt{3}i\frac{\left(p - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) - \left(p - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}{\left(p - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(p - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)} = -\sqrt{3}i\frac{\left(p - e^{-i\frac{\pi}{3}} - p + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}{\left(p - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(p - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}$$

$$S(p) = -\sqrt{3}i\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}{\left(p - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(p - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)} = -\sqrt{3}i\frac{2i\sin\frac{\pi}{3}}{p^2 - p + 1} = -\sqrt{3}i\frac{2i\frac{\sqrt{3}}{2}}{p^2 - p + 1} = \frac{3}{p^2 - p + 1}$$

On a donc bien :

$$S(p) = \sqrt{3}i\left[\frac{1}{p - e^{-i\frac{\pi}{3}}} - \frac{1}{p - e^{i\frac{\pi}{3}}}\right]$$

Appliquons la transformée de Laplace inverse $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+a}\right) = e^{-at}$:

$$s(t) = \sqrt{3}i\left[e^{e^{-i\frac{\pi}{3}}t} - e^{e^{i\frac{\pi}{3}}t}\right]$$

$$s(t) = \sqrt{3}i\left[e^{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}t} - e^{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}t}\right]$$

$$s(t) = \sqrt{3}ie^{\frac{1}{2}t}\left[e^{-\frac{\sqrt{3}i}{2}t} - e^{\frac{\sqrt{3}i}{2}t}\right] = -\sqrt{3}ie^{\frac{1}{2}t}\left[e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t} - e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right]$$

On peut utiliser les formules d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad ; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$s(t) = -\sqrt{3}ie^{\frac{1}{2}t}2i\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$s(t) = -2\sqrt{3}e^{\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

On retrouve bien la même solution.

J'ai détaillé cette démarche dans le cours de 1° année pour illustrer le cours sur la stabilité en 2° année. Le petit 1° année de prépa pourra ne pas la connaître !

• **Application 2 : TLI avec polynôme de degré 2 multiple au dénominateur**

J'ai détaillé cette démarche dans le cours de 1° année pour illustrer le cours sur la stabilité en 2° année. Le petit 1° année de prépa pourra ne pas la connaître !

$$S(p)=\frac{3}{(p^2-p+1)^2}=2\sqrt{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left[\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2}$$

Méthode classique : il n'y en a pas, le tableau des transformées de Laplace ne nous donne pas ce cas

$$\frac{p+a}{[(p+a)^2+\omega^2]^n} \quad ; \quad \frac{\omega}{[(p+a)^2+\omega^2]^n}$$

Méthode par éléments simples complexes d'ordre 1:

$$S(p)=\frac{3}{(p^2-p+1)^2}=\frac{3}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}$$

$$S(p)=\frac{A_1}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}+\frac{A_2}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}+\frac{B_1}{\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}+\frac{B_2}{\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}$$

Soit :

$$\frac{3}{(p^2-p+1)^2}=\frac{A_1}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}+\frac{A_2}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}+\frac{B_1}{\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}+\frac{B_2}{\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}$$

Multiplions par	Valeur en p=	
$\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$	$e^{i\frac{\pi}{3}}$	$A_2=\frac{3}{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}=\frac{3}{\left(2i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2}=\frac{3}{\left(2i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{3}{\left(i\sqrt{3}\right)^2}=\frac{3}{-3}=-1$
$\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2$	$e^{-i\frac{\pi}{3}}$	$B_2=\frac{3}{\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}=\frac{3}{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}=-1$

Soit :

$$\frac{3}{(p^2-p+1)^2}=\frac{A_1}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}-\frac{1}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}+\frac{B_1}{\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}-\frac{1}{\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}$$

Prenons deux valeurs particulières :

<table>
<tr><td>0</td><td>
$$\frac{3}{(1)^2}=\frac{A_1}{\left(-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}-\frac{1}{\left(-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}+\frac{B_1}{\left(-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}-\frac{1}{\left(-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}$$
$$3=-\frac{A_1}{e^{i\frac{\pi}{3}}}-\frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}}-\frac{B_1}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}-\frac{1}{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$$
$$3e^{i\frac{\pi}{3}}=-A_1-\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}}}-\frac{B_1e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}-\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$$
$$3e^{i\frac{\pi}{3}}=-A_1-\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}}-\frac{B_1e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}}-\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}}{e^{-i\frac{2\pi}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$
$$3e^{i\frac{\pi}{3}}=-A_1-e^{-i\frac{\pi}{3}}-B_1e^{i\frac{2\pi}{3}}-e^{i\pi}$$
$$3e^{i\frac{\pi}{3}}=-A_1-e^{-i\frac{\pi}{3}}-B_1e^{i\frac{2\pi}{3}}+1$$
$$A_1+B_1e^{i\frac{2\pi}{3}}=-3e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}+1$$
$$A_1+B_1e^{i\frac{2\pi}{3}}=-2e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}+1$$
$$A_1+B_1e^{i\frac{2\pi}{3}}=-2e^{i\frac{\pi}{3}}-\left(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)+1$$
$$e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}=2\cos\frac{\pi}{3}=1$$
$$A_1+B_1e^{i\frac{2\pi}{3}}=-2e^{i\frac{\pi}{3}}-1+1$$
$$A_1+B_1e^{i\frac{2\pi}{3}}=-2e^{i\frac{\pi}{3}}$$
</td></tr>
<tr><td>$-e^{i\frac{\pi}{3}}$</td><td>
$$\frac{3}{\left(-e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2\left(-e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}$$
$$=\frac{A_1}{\left(-e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}-\frac{1}{\left(-e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}+\frac{B_1}{\left(-e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}-\frac{1}{\left(-e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}$$
$$\frac{3}{4e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}=-\frac{A_1}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}-\frac{1}{4e^{i\frac{2\pi}{3}}}-\frac{B_1}{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}-\frac{1}{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}$$
$$e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}=1$$
$$\frac{3}{4e^{i\frac{2\pi}{3}}}+\frac{1}{4e^{i\frac{2\pi}{3}}}=-\frac{A_1}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}-B_1-1$$
$$\frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}}=-\frac{A_1}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}-(B_1+1)$$
$$\frac{2}{e^{i\frac{\pi}{3}}}=-A_1-2e^{i\frac{\pi}{3}}(B_1+1)$$
$$2=-A_1e^{i\frac{\pi}{3}}-2e^{i\frac{2\pi}{3}}(B_1+1)$$
</td></tr>
</table>

Résolution :

$$\begin{cases} 2 = -A_1 e^{i\frac{\pi}{3}} - 2e^{i\frac{2\pi}{3}}(B_1 + 1) \\ A_1 + B_1 e^{i\frac{2\pi}{3}} = -2e^{i\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

$$A_1 = -2e^{i\frac{\pi}{3}} - B_1 e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$2 = -A_1 e^{i\frac{\pi}{3}} - 2e^{i\frac{2\pi}{3}}(B_1 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2 = -\left(-2e^{i\frac{\pi}{3}} - B_1 e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) e^{i\frac{\pi}{3}} - 2e^{i\frac{2\pi}{3}}(B_1 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2 = \left(2e^{i\frac{2\pi}{3}} + B_1 e^{i\pi}\right) - 2e^{i\frac{2\pi}{3}}(B_1 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} - B_1 - 2e^{i\frac{2\pi}{3}} B_1 - 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 2 = -B_1 \left(1 + 2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$$

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow B_1 = -\frac{2}{1 + 2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = -\frac{2}{1 - 1 + i\sqrt{3}} = -\frac{2}{i\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} i$$

$$A_1 = -2e^{i\frac{\pi}{3}} - B_1 e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} i \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3} - \frac{-\sqrt{3}i - 3}{3}$$

$$A_1 = \frac{-3 - 3\sqrt{3}i + \sqrt{3}i + 3}{3} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} i$$

Finalement :

$$\frac{3}{(p^2-p+1)^2}=\frac{\frac{-2\sqrt{3}}{3}i}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}-\frac{1}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}+\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}i}{\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}-\frac{1}{\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}$$

Soit :

$$s(t)=\left[\frac{-2\sqrt{3}}{3}ie^{e^{i\frac{\pi}{3}}t}-te^{e^{i\frac{\pi}{3}}t}+\frac{2\sqrt{3}}{3}ie^{e^{-i\frac{\pi}{3}}t}-te^{e^{-i\frac{\pi}{3}}t}\right]u(t)$$

$$s(t)=\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}i\left(e^{e^{-i\frac{\pi}{3}}t}-e^{e^{i\frac{\pi}{3}}t}\right)-t\left(e^{e^{-i\frac{\pi}{3}}t}+e^{e^{i\frac{\pi}{3}}t}\right)\right]u(t)$$

On a :

$$e^{e^{-i\frac{\pi}{3}}t}+e^{e^{i\frac{\pi}{3}}t}=e^{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}t}+e^{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}t}=e^{\frac{1}{2}t}\left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t}+e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right)=e^{\frac{1}{2}t}2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$e^{e^{-i\frac{\pi}{3}}t}-e^{e^{i\frac{\pi}{3}}t}=e^{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}t}-e^{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}t}=e^{\frac{1}{2}t}\left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t}-e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right)=e^{\frac{1}{2}t}2i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$s(t)=\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}ie^{\frac{1}{2}t}2i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-te^{\frac{1}{2}t}2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]u(t)$$

$$s(t)=\left[-\frac{4\sqrt{3}}{3}e^{\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-2te^{\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]u(t)$$

A.II.2.f.iv Application à la résolution d'une équation différentielle

• **Application 1 : Equation différentielle simple**

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2}-3\frac{ds(t)}{dt}+2s(t)=e(t)$$

On suppose toutes les conditions initiales nulles. L'entrée $e(t)$ est un échelon unitaire : $e(t)=u(t)$.

Pour résoudre cette équation, on la passe dans le domaine de Laplace et on exprime $\frac{S(p)}{E(p)}$:

$$p^2S(p)-3pS(p)+2S(p)=E(p)$$

$$(p^2-3p+2)S(p)=E(p)$$

$$\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{1}{p^2-3p+2}$$

On a :

$$E(p) = \frac{1}{p}$$

Donc :

$$S(p) = \frac{1}{p(p^2 - 3p + 2)}$$

Il faut maintenant décomposer $S(p)$ en éléments simples, on peut se rendre compte que le polynôme de degré 2 a un discriminent positif, on a donc :

$$S(p) = \frac{1}{p(p-1)(p-2)}$$

On peut donc proposer le décomposition suivante :

$$S(p) = \frac{1}{p(p-1)(p-2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-1)} + \frac{C}{(p-2)}$$

Comme chaque dénominateur est simple, on peut utiliser la méthode vue précédemment (méthode 2 : multiplication par le dénominateur puis annulation de ce terme)

On obtient :

$$A = \frac{1}{2} \quad ; \quad B = -1 \quad ; \quad C = \frac{1}{2}$$

$$S(p) = \frac{1}{2}\frac{1}{p} - \frac{1}{(p-1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(p-2)}$$

Il reste à appliquer la transformée de Laplace inverse à $S(p)$

$$s(t) = \left(\frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2}e^{2t}\right)u(t)$$

Vérifions que cette solution est correcte :

$$\frac{ds(t)}{dt} = (-e^t + e^{2t})u(t) \quad ; \quad \frac{d^2s(t)}{dt^2} = (-e^t + 2e^{2t})u(t)$$

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} - 3\frac{ds(t)}{dt} + 2s(t) = \left(-e^t + 2e^{2t} - 3(-e^t + e^{2t}) + 2\left(\frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2}e^{2t}\right)\right)u(t)$$

$$= (-e^t + 2e^{2t} + 3e^t - 3e^{2t} + 1 - 2e^t + e^{2t})u(t) = u(t) = e(t)$$

$$cqfd$$

• **Application 2 : Equation différentielle plus complexe**

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^3s(t)}{dt^3} - s(t) = \frac{d^2e(t)}{dt^2} - 6\frac{de(t)}{dt} - e(t)$$

On suppose toutes les conditions initiales nulles.

Pour résoudre cette équation, on la passe dans le domaine de Laplace et on exprime $\frac{S(p)}{E(p)}$:

$$p^3S(p) - S(p) = p^2E(p) - 6pE(p) - E(p)$$

$$(p^3 - 1)S(p) = (p^2 - 6p - 1)E(p)$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{p^2 - 6p - 1}{p^3 - 1}$$

Supposons que l'entrée soit une impulsion : $E(p) = 1$

On a donc :

$$S(p) = \frac{p^2 - 6p - 1}{p^3 - 1}$$

Il faut factoriser le dénominateur, donnons le résultat :

$$p^3 - 1 = (p - \mathbf{1})(p^2 + p + 1)$$

(cf méthode Horner avec racine évidente par exemple)

Donc :

$$S(p) = \frac{p^2 - 6p - 1}{(p - 1)(p^2 + p + 1)}$$

On a montré que :

$$S(p) = \frac{-2}{(p - 1)} + \frac{3p - 1}{(p^2 + p + 1)}$$

Transformons les termes afin de reconnaître des fonctions du tableau des transformées de Laplace :

$$S(p) = \frac{-2}{(p - 1)} + \frac{3p - 1}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

On voit ici que l'on fait apparaître des fonctions qui ressemblent à des fonctions du tableau des transformées de Laplace :

$$\frac{1}{p + a} \quad ; \quad \frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2} \quad ; \quad \frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$$

Il reste donc à effectuer des transformations, judicieuses, permettant de se rapporter à ces exemples :

$$S(p)=\frac{-2}{(p-1)}+3\frac{p+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{-1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$S(p)=\frac{-2}{(p-1)}+3\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}+\frac{-\frac{3}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}+\frac{-1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}$$

$$S(p)=\frac{-2}{(p-1)}+3\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}+\frac{-\frac{5}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}$$

$$S(p)=\frac{-2}{(p-1)}+3\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}+\frac{-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{4}{3}}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}$$

$$S(p)=\frac{-2}{(p-1)}+3\frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}$$

$$S(p)=\frac{-2}{(p-1)}+3\frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}-\frac{5}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}$$

Il reste, pour trouver les solutions temporelles de l'équation, à appliquer les transformées de Laplace inverse :

$$s(t)\left[=-2e^{t}+3e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right)-\frac{5}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right)\right]$$