A.III. Cinématique du solide

Les mécanismes sont composés de plusieurs pièces, en mouvement les unes par rapport aux autres. Nous allons donc nous intéresser aux mouvements de solides les uns par rapport aux autres.

A chaque solide S_i est associée une base orthonormée directe $\mathfrak{B}_i(\vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i})$

A.III.1 Préliminaires

A.III.1.a Solide indéformable – Définition

Un solide rigide ou indéformable est un solide dont tous les points restent à la même distance les uns des autres pendant au cours du temps. Cordianement

Soit S un solide indéformable. P_i et P_j sont deux points de S

$$\forall (P_i, P_j) \in S, \forall t, \left\|\overrightarrow{P_i P_j}\right\| = cste$$

A.III.1.b Notations

Soient deux solides S_i et $\mathrm{S_j}$ en mouvement l'un par rapport à l'autre et un point A quelconque.

La vitesse du point A appartenant à S_j par rapport à S_i est notée

$$\vec{V}(A \in \mathrm{S_j}/\mathrm{S_i}) \quad ou \quad \vec{V}(A, \mathrm{S_j}/S_i) \quad ou \quad \vec{V}(A, j/i)$$

Bien qu'un point appartienne matériellement à un solide, on peut calculer sa vitesse en considérant virtuellement qu'il appartient à un autre solide.

Par ailleurs, on a :

$$\vec{V}(A, i/j) = -\vec{V}(A, j/i)$$

A.III.2 Mouvements entre solides

Lorsque deux solides sont en mouvement l'un par rapport à l'autre, à tout instant, ce mouvement est :

- Soit une translation
- Soit une rotation autour d'un point fixe de chaque solide
- Soit une rotation autour d'un point mobile dans chaque solide appelé « Centre Instantané de Rotation » (CIR).

A.III.2.a Mouvement de translation

Soient deux solides S_i et S_j en translation l'un par rapport à l'autre. La particularité du mouvement de translations est de ne pas présenter de rotation, ce qui implique que l'expression des vecteurs de base de chacune des bases des solides S_i et S_j dans l'autre base reste la même au cours du temps.

Dans le cas de la translation, on a :

$$\boxed{\forall(A,B) \in S_j, \vec{V}(B,j/i) = \vec{V}(A,j/i)}$$

Démonstration :

Soit O un point fixe dans i. Soient A et B deux points quelconques associés à la pièce j (fixés dans j).

$$\vec{V}(B,j/i) = \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_i = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_i + \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_i$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_i = \vec{0} \; car \; \overrightarrow{AB} \; vecteur \; constant \; dans \; \mathfrak{B}_i \; et \; \mathfrak{B}_j$$

$$\vec{V}(B,j/i) = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_i = \vec{V}(A,j/i)$$

Remarque : Ne pas garder de produit vectoriel lors de l'utilisation de cette formule. Il faut le calculer

A.III.2.b Mouvement de rotation

Soient deux solides S_i et S_j en rotation l'un par rapport à l'autre. Soit Δ l'axe de rotation entre les deux solides passant par le point O et comportant le vecteur unitaire $\vec{n}$.

On définit le vecteur rotation du solide j par rapport au solide i noté $\overrightarrow{\Omega_{j/i}}$. Ce vecteur est parralèle à l'axe de rotation Δ, et sa norme est égale à la vitesse de rotation $\Omega_{j/i} = \dot{\theta}_{j/i}$ du solide j par rapport au solide i en rd/s.

$$\overrightarrow{\Omega_{j/i}} = \Omega_{j/i}\vec{n} = \dot{\theta}_{j/i}\vec{n}$$

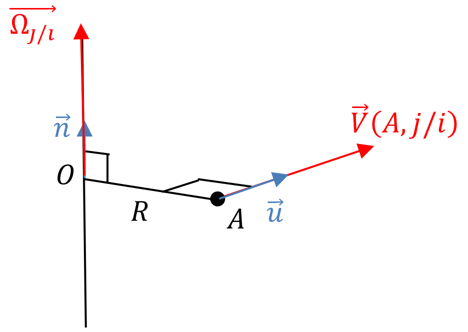
$\Omega_{j/i}$ est positif si la rotation est en sens direct autour du vecteur $\vec{n}$.

On a :

$$\overrightarrow{\Omega_{j/i}} = -\overrightarrow{\Omega_{i/j}}$$

Soit un point A quelconque. La vitesse $\vec{V}(A, j/i)$ est

- proportionnelle à sa distance R à l'axe de rotation
- proportionnelle à la vitesse de rotation
- perpendiculaire à la droite (OA) orthogonale à l'axe de rotation passant par A.



$$\|\vec{u}\| = \|\vec{n}\| = 1$$

On peut exprimer cette vitesse ainsi :

$$\vec{V}(A, j/i) = R\Omega_{j/i}\vec{u}$$

Le vecteur $\vec{u}$ peut être obtenu à l'aide d'un produit vectoriel :

$$\vec{u} = \frac{\vec{n} \wedge \overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|} = \frac{\vec{n} \wedge \overrightarrow{OA}}{R}$$

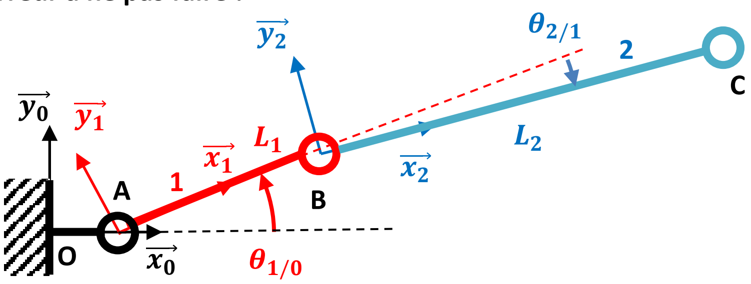
On peut alors exprimer la vitesse de A ainsi :

$$\vec{V}(A, j/i) = R\Omega_{j/i}\vec{u} = \Omega_{j/i}\vec{n} \wedge \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \wedge \overrightarrow{OA}$$

Soit un point O appartenant à l'axe de rotation. On a finalement:

$$\boxed{\forall P, \vec{V}(P, j/i) = \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \wedge \overrightarrow{OP}}$$

Attention : cette formule n'est vraie que si toutes les rotations entre i et j ont des axes concourants en O. Exemple d'erreur à ne pas faire :



Il est faux d'écrire : $\vec{V}(C, 2/0) = \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{AC}$

A.III.3 Champs des vitesses et accélérations d'un solide

A.III.3.a Champs des vitesses

A.III.3.a.i Formule de Varignon

Dans le cas des solides indéformables et quel que soit le mouvement considéré, il existe une relation entre la vitesse de chaque point de ce solide d'un mouvement donné. Cette relation est appelée relation de Varignon :

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{V}(B,j/i) = \vec{V}(A,j/i) + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB} \\ \vec{V}(B,j/i) = \vec{V}(A,j/i) + \overrightarrow{BA} \Lambda \overrightarrow{\Omega_{j/i}}\end{gathered}}$$

Attention : n'utiliser cette formule que lorsque le mouvement entre i et j est un mouvement élémentaire (une liaison), sinon composer d'abord le mouvement (cf composition du mouvement)

Moyens mnémotechniques pour retenir ces formules :

- Formule 1 : Symétrie de Ω et de l'écriture : $AB\Omega BA$
- Formule 2 : $BABA\Omega$ ($BABAR$ en statique)

Démonstration :

Soit O un point fixe dans i. Soient A et B deux points quelconques associés à la pièce j (fixés dans j).

$$\vec{V}(B,j/i) = \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_i = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_i + \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_i = \vec{V}(A,j/i) + \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_j + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_j = \vec{0} \; car\ A\ et\ B\ fixes\ dans\ j$$

$$\vec{V}(B,j/i) = \vec{V}(A,j/i) + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB}$$

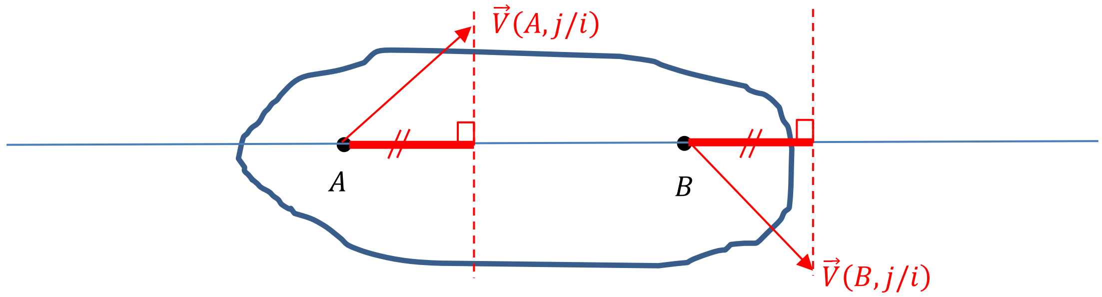
Remarques :

- On retrouve bien la relation de vitesse du mouvement de translation, cas particulier du mouvement de rotation où la rotation est nulle : $\overrightarrow{\Omega_{j/i}} = \vec{0}$
$$\vec{V}(B,j/i) = \vec{V}(A,j/i) + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB} = \vec{V}(A,j/i)$$
- On retrouve bien la relation de vitesse du mouvement de rotation avec A sur l'axe:
$$\vec{V}(B,j/i) = \vec{V}(A,j/i) + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB}$$
- D'une manière générale, cette relation est utilisée lorsque la vitesse en A est connue (nulle ou non), afin d'obtenir l'expression de la vitesse en tout autre point.

A.III.3.a.ii Equiprojectivité

Le champ des vitesses d'un solide est équiprojectif. Il respecte la condition suivante :

$$\forall (A,B) \in S_j, \vec{V}(A,j/i).\overrightarrow{AB} = \vec{V}(B,j/i).\overrightarrow{AB}$$



Démonstration :

$$\vec{V}(B,j/i).\overrightarrow{AB} = \left(\vec{V}(A,j/i) + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{V}(B,j/i).\overrightarrow{AB} = \vec{V}(A,j/i).\overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{V}(B,j/i).\overrightarrow{AB} = \vec{V}(A,j/i).\overrightarrow{AB}$$

A.III.3.b Champs des accélérations

De même que précédemment, il existe une relation entre les accélérations de deux points d'un solide indéformable. Toutefois, elle ne doit pas être connue et est donnée ci-dessous à titre d'information.

$$\vec{\Gamma}(B,j/i) = \vec{\Gamma}(A,j/i) + \left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{j/i}}}{dt}\right)_i \Lambda \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \left(\overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB}\right)$$

Démonstration :

$$\vec{V}(B,j/i) = \vec{V}(A,j/i) + \overrightarrow{BA} \Lambda \overrightarrow{\Omega_{j/i}}$$

$$\left.\frac{d\vec{V}(B,j/i)}{dt}\right)_i = \left.\frac{d\vec{V}(A,j/i)}{dt}\right)_i + \left.\frac{d\overrightarrow{BA}\Lambda\overrightarrow{\Omega_{j/i}}}{dt}\right)_i$$

$$\vec{\Gamma}(B,j/i) = \vec{\Gamma}(A,j/i) + \overrightarrow{BA} \Lambda \left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{j/i}}}{dt}\right)_i + \left.\frac{d\overrightarrow{BA}}{dt}\right)_i \Lambda \overrightarrow{\Omega_{j/i}}$$

$$\vec{\Gamma}(B,j/i) = \vec{\Gamma}(A,j/i) + \left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{j/i}}}{dt}\right)_i \Lambda \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{BA}\right) \Lambda \overrightarrow{\Omega_{j/i}}$$

$$\vec{\Gamma}(B,j/i) = \vec{\Gamma}(A,j/i) + \left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{j/i}}}{dt}\right)_i \Lambda \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \left(\overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB}\right)$$

A.III.4 Composition du mouvement

Soient n solides S_i en mouvements quelconques les uns par rapport aux autres et un point M quelconque.

A.III.4.a Principe

Lorsque l'on parle de composition du mouvement, on prend souvent l'exemple d'un tapis roulant et d'un homme se déplaçant dessus. Les vitesses de translation se somment.

Prenons un second exemple :

Supposons qu'un horloger soit en train de monter une horloge très lourde au bout d'une corde. L'horloge effectue dont un mouvement de translation verticalement.

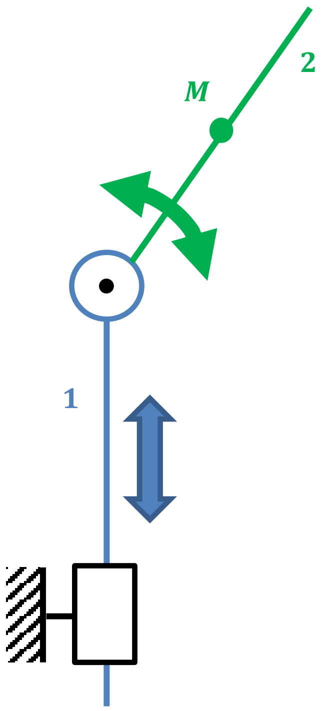
L'horloge étant en fonctionnement, les aiguilles sont en mouvement de rotation.

Une mouche a eu l'idée de se poser sur l'aiguille et se déplace en translation sur celle-ci.

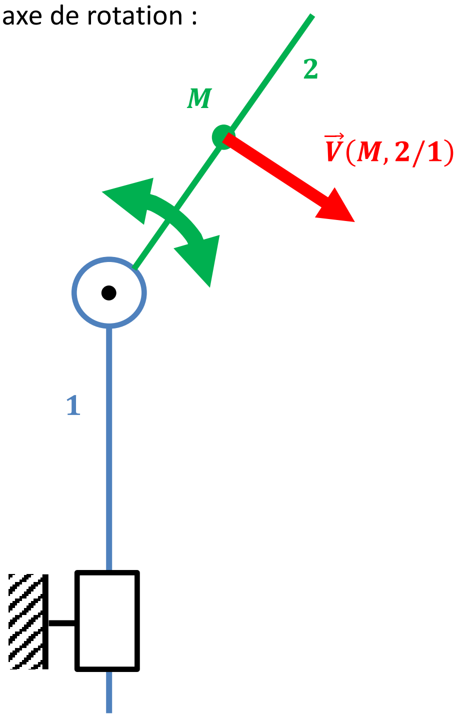
Proposons le modèle suivant où :

- 1 est le boitier de l'horloge
- 2 est l'aiguille en rotation par rapport à 1
- M est la mouche

Dans ce paragraphe, nous supposerons que la mouche s'est collée à l'aiguille et ne peut pas se déplacer dessus. On suppose donc que le point M appartient à la pièce 2.

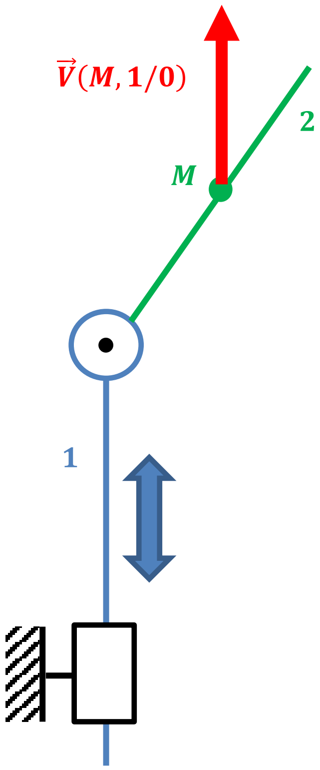


Supposons dans un premier temps que l'horloger s'arrête de tirer la corde. Vu du sol, le point M aura un mouvement de rotation autour de l'axe de rotation :



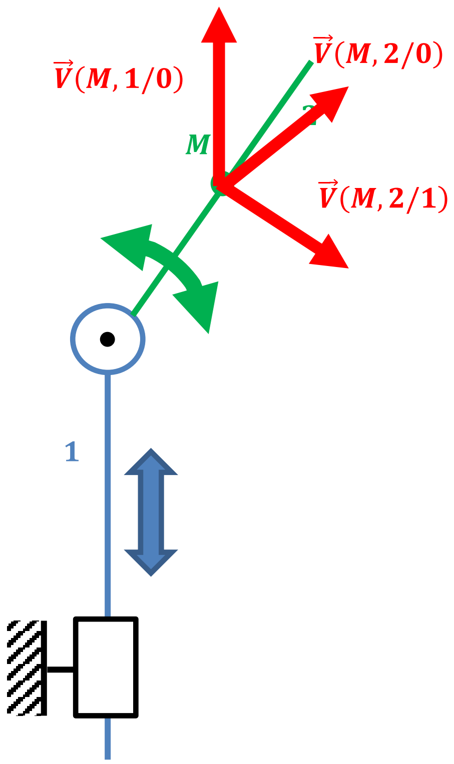
Avec $\vec{V}(M,2/0) = \vec{V}(M,2/1)$ et $\vec{V}(M,1/0) = \vec{0}$

Considérons maintenant que l'horloger monte l'horloge alors que la pile est vide et que l'horloge ne fonctionne plus. Vu du sol, le point M aura un mouvement de translation verticale :



Avec $\vec{V}(M,2/0) = \vec{V}(M,2/1)$ et $\vec{V}(M,1/0) = \vec{0}$

Supposons maintenant que ces deux mouvements ont lieu en même temps, on va alors sommer les deux vitesses précédentes :

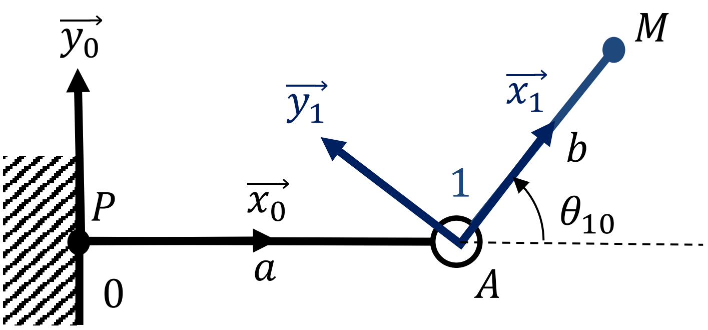


On a donc bien, dans tous les cas :

$$\vec{V}(M,2/0)=\vec{V}(M,2/1)+\vec{V}(M,1/0)$$

C'est ce que l'on appelle la composition du mouvement.

On remarquera que l'on peut parfaitement parler de la vitesse $\vec{V}(M,1/0)$ malgré le fait que le point M n'appartienne pas physiquement à la pièce 1. Exemple !



$$\overrightarrow{V(P,1/0)}\neq\vec{0}$$

A.III.4.b Composition des rotations

$$\forall (i,j,k) \leq n$$

$$\overrightarrow{\Omega_{k/i}} = \overrightarrow{\Omega_{k/j}} + \overrightarrow{\Omega_{j/i}}$$

A.III.4.c Composition des vitesses

A.III.4.c.i Principe

$$\forall (i,j,k) \leq n$$

$$\vec{V}(M,k/i) = \vec{V}(M,k/j) + \vec{V}(M,j/i)$$

L'intérêt de cette formule est d'exprimer la vitesse d'un point entre deux solides en passant par chacune des liaisons des pièces intermédiaires qui permettent d'aller du solide auquel le point M appartient jusqu'au solide par rapport auquel est calculée la vitesse. Ainsi, connaissant les mouvements élémentaires associés à chaque liaison intermédiaire, on peut exprimer chaque vitesse intermédiaire simplement et en déduire la vitesse recherchée.

A.III.4.c.ii Différence entre $\vec{V}(M/i)$ et $\vec{V}(M,k/i)$

Il arrive que l'on cherche une vitesse $\vec{V}(M/i)$.

Dans ce cas, on a :

$$\vec{V}(M/i) = \vec{V}(M/k) + \vec{V}(M,k/j) + \vec{V}(M,j/i)$$

En SII, nous allons très généralement nous intéresser à des vitesses de points matériels appartenant à des solides. Ainsi, nous aurons toujours la possibilité de trouver une pièce k dans laquelle le point en question a une vitesse nulle :

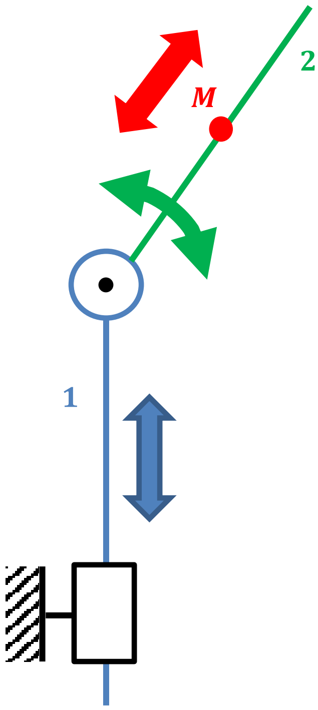
$$\vec{V}(M/k) = \vec{0}$$

Ce qui nous conduira a écrire :

$$\vec{V}(M/i) = \vec{V}(M/k) + \vec{V}(M,k/j) + \vec{V}(M,j/i) = \vec{V}(M,k/j) + \vec{V}(M,j/i)$$

Donnons toutefois un petit exemple afin de bien comprendre ces notations :

Reprenons le cas de l'horloge et de la mouche et supposons maintenant que la mouche puisse se déplacer à convenance sur l'aiguille.



A un instant quelconque, la mouche est animée de 3 mouvements :

- Les deux mouvements issus du déplacement de l'horloge et de l'aiguille, c'est-à-dire qu'elle a la vitesse du point M « en dessous » d'elle, appartenant à l'aiguille $\vec{V}(M,2/0) = \vec{V}(M,2/1) + \vec{V}(M,1/0)$
- Le mouvement propre de la mouche en translation selon l'aiguille $\vec{V}(M/2)$

Dans ce cas, comme la mouche est un « objet libre », on écrira sa vitesse par rapport au sol $\vec{V}(M/0)$ tel que :

$$\vec{V}(M/0) = \vec{V}(M/2) + \vec{V}(M,2/1) + \vec{V}(M,1/0)$$

A.III.4.d Remarques

A.III.4.d.i Utilité de la composition du mouvement

Pour le calcul de $\vec{V}(M,k/i)$, dès lors qu'il n'existe pas une liaison unique (pivot, glissière…) entre les solides i et k, il n'est plus possible d'utiliser la formule de Varignon immédiatement car on fait alors apparaître une nouvelle vitesse $\vec{V}(N,k/i)$ en un autre point dont on ne peut rien dire, quel que soit le point choisi. Il devient alors nécessaire de composer les mouvements, afin de passer par tous les mouvements élémentaires entre k et i, c'est-à-dire concrètement par toutes les liaisons. On utilise alors un outil très pratique, le graphe des liaisons.

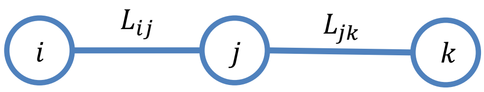
A.III.4.d.ii Graphe des liaisons et utilité

• **Principe**

Pour bien composer les mouvements, on établit un **graphe des liaisons**.

Le principe est de représenter

- les pièces par des cercles et des numéros les pièces
- les liaisons intermédiaires entre chaque pièce par des traits entre les cercles et la description de la liaison associée (Pivot, Glissière…)



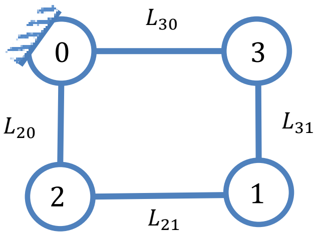
Il suffit alors de composer les vitesses en suivant les différentes liaisons sur le graphe des liaisons.

$$\vec{V}(M,k/i) = \vec{V}(M,k/j) + \vec{V}(M,j/i)$$

Les liaisons intermédiaires étant connues, nous saurons bientôt y associer les vitesses correspondantes.

• **Composition dans une chaîne fermée**

Soit un mécanisme dont le graphe des liaisons est en boucle (chaîne fermée) :



Dans le cas de chaînes fermées, l'expression d'une vitesse peut être réalisée par les différents chemins qui mènent de la pièce où la vitesse est recherchée vers la pièce de référence.

Exemple :

$$\vec{V}(M,1/0) = \vec{V}(M,1/3) + \vec{V}(M,3/0) = \vec{V}(M,1/2) + \vec{V}(M,2/0)$$

$$\vec{V}(M,2/0) = \vec{V}(M,2/1) + \vec{V}(M,1/3) + \vec{V}(M,3/0)$$

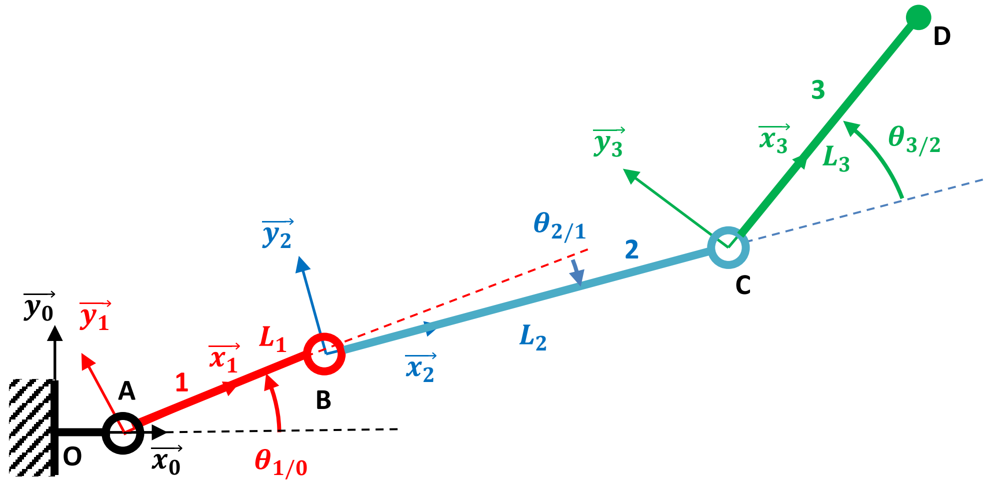
Attention à ne passer que par des liaisons existantes

Remarque : les formules trouvées feront apparaître des inconnues cinématiques différentes, et des variables géométriques différentes. Toutefois, après résolution géométrique et cinématique, même si les formules n'ont pas du tout la même forme, les valeurs numériques seront forcément les mêmes.

A.III.4.e Méthodes de calcul de vitesses dans les mécanismes

A.III.4.e.i Exemple 1

Soit le mécanisme suivant :



Calculons la vitesse : $\vec{V}(D,3/0)$

- **<u>Bonne méthode 1 – Chasles puis changement de base de dérivation</u>**

$$\vec{V}(D,3/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{AD}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d(L_1\overrightarrow{x_1} + L_2\overrightarrow{x_2} + L_3\overrightarrow{x_3})}{dt}\right)_0 = L_1\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0 + L_2\left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right)_0 + L_3\left.\frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt}\right)_0$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge\overrightarrow{x_1} = \dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right)_2 + \overrightarrow{\Omega_{2/0}}\wedge\overrightarrow{x_2} = (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})\overrightarrow{y_2}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt}\right)_3 + \overrightarrow{\Omega_{3/0}}\wedge\overrightarrow{x_2} = (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})\overrightarrow{y_3}$$

$$\vec{V}(D,3/0) = L_3(\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})\overrightarrow{y_3} + L_2(\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})\overrightarrow{y_2} + L_1\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}$$

• **Bonne méthode 2 - Composition du mouvement puis Varignon**

$$\vec{V}(D,3/0)=\vec{V}(D,3/2)+\vec{V}(D,2/1)+\vec{V}(D,1/0)$$

$$\vec{V}(D,3/2)=\vec{V}(C,3/2)+\overrightarrow{\Omega_{3/2}}\wedge\overrightarrow{CD}$$

$$\vec{V}(D,3/2)=\vec{0}+\dot{\theta}_{3/2}\overrightarrow{z_3}\wedge L_3\overrightarrow{x_3}=L_3\dot{\theta}_{3/2}\overrightarrow{y_3}$$

$$\vec{V}(D,2/1)=\vec{V}(B,2/1)+\overrightarrow{\Omega_{2/1}}\wedge\overrightarrow{BD}$$

$$\vec{V}(D,2/1)=\vec{0}+\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{z_3}\wedge L_3\overrightarrow{x_3}+\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{z_2}\wedge L_2\overrightarrow{x_2}$$

$$\vec{V}(D,2/1)=L_3\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{y_3}+L_2\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{y_2}$$

$$\vec{V}(D,1/0)=\vec{V}(A,1/0)+\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge\overrightarrow{AD}$$

$$\vec{V}(D,1/0)=\vec{0}+\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_3}\wedge L_3\overrightarrow{x_3}+\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_2}\wedge L_2\overrightarrow{x_2}+\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_1}\wedge L_1\overrightarrow{x_1}$$

$$\vec{V}(D,1/0)=L_3\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_3}+L_2\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_2}+L_1\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}$$

Soit finalement :

$$\vec{V}(D,3/0)=L_3\left(\dot{\theta}_{3/2}+\dot{\theta}_{2/1}+\dot{\theta}_{1/0}\right)\overrightarrow{y_3}+L_2\left(\dot{\theta}_{2/1}+\dot{\theta}_{1/0}\right)\overrightarrow{y_2}+L_1\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}$$

• **Mauvaise méthode 1 – Changement de base de dérivation puis Chasles**

$$\vec{V}(D,3/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{AD}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{AD}}{dt}\right)_3 + \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{AD}$$

L'erreur à ne pas faire consiste alors à écrire : $\left.\frac{d\overrightarrow{AD}}{dt}\right)_3 = \vec{0}$

On va donc devoir calculer ce terme en utilisant la relation de Chasles, ce qu'il aurait fallu faire dès le départ !

$$\overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{AD} = \left(\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}\right)\overrightarrow{z_0} \wedge \left(L_1\overrightarrow{x_1} + L_2\overrightarrow{x_2} + L_3\overrightarrow{x_3}\right)$$

$$\overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{AD} = \left(\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}\right)L_1\overrightarrow{y_1} + \left(\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}\right)L_2\overrightarrow{y_2} + \left(\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}\right)L_3\overrightarrow{y_3}$$

Travaillons maintenant sur le terme $\left.\frac{d\overrightarrow{AD}}{dt}\right)_3$:

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AD}}{dt}\right)_3 = \left.\frac{d\left(L_1\overrightarrow{x_1} + L_2\overrightarrow{x_2} + L_3\overrightarrow{x_3}\right)}{dt}\right)_3 = L_1\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0 + L_2\left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right)_0 + L_3\left.\frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt}\right)_0$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_3 = \left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/3}} \wedge \overrightarrow{x_1} = \left(\dot{\theta}_{1/2} + \dot{\theta}_{2/3}\right)\overrightarrow{y_1}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right)_3 = \left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right)_2 + \overrightarrow{\Omega_{2/3}} \wedge \overrightarrow{x_2} = \dot{\theta}_{2/3}\overrightarrow{y_2}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt}\right)_3 = \vec{0}$$

Soit au final :

$$\vec{V}(D,3/0) = \left(\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}\right)L_1\overrightarrow{y_1} + \left(\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}\right)L_2\overrightarrow{y_2} + \left(\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}\right)L_3\overrightarrow{y_3} + \left(\dot{\theta}_{1/2} + \dot{\theta}_{2/3}\right)L_1\overrightarrow{y_1} + \dot{\theta}_{2/3}L_2\overrightarrow{y_2}$$

On retrouve alors bien :

$$\vec{V}(D,3/0) = L_3\left(\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}\right)\overrightarrow{y_3} + L_2\left(\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}\right)\overrightarrow{y_2} + L_1\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}$$

• **Mauvaise méthode 2 – Varignon puis Composition du mouvement**

$$\vec{V}(D,3/0) = \vec{V}(A,3/0) + \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{AD} = (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})\overrightarrow{z_0} \wedge (L_1\overrightarrow{x_1} + L_2\overrightarrow{x_2} + L_3\overrightarrow{x_3})$$

$$\overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{AD} = (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})(L_1\overrightarrow{y_1} + L_2\overrightarrow{y_2} + L_3\overrightarrow{y_3})$$

$$\overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{AD} = (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})L_1\overrightarrow{y_1} + (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})L_2\overrightarrow{y_2} + (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})L_3\overrightarrow{y_3}$$

Attention : $\vec{V}(A,3/0) \neq \vec{0}$

Il faut donc travailler sur ce terme, et forcément composer le mouvement (trop tard), car aucune formule de Varignon ne va aider

$$\vec{V}(A,3/0) = \vec{V}(A,3/2) + \vec{V}(A,2/1) + \vec{V}(A,1/0)$$

$$\vec{V}(A,1/0) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(A,2/1) = \vec{V}(B,2/1) + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{BA}$$

$$\vec{V}(A,2/1) = \vec{0} + \dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{z_1} \wedge (-L_1\overrightarrow{x_1})$$

$$\vec{V}(A,2/1) = -L_1\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{y_1}$$

$$\vec{V}(A,3/2) = \vec{V}(C,3/2) + \overrightarrow{\Omega_{3/2}} \wedge \overrightarrow{CA}$$

$$\vec{V}(A,3/2) = \vec{0} + \dot{\theta}_{3/2}\overrightarrow{z_3} \wedge (-L_1\overrightarrow{x_1} - L_2\overrightarrow{x_2})$$

$$\vec{V}(A,3/2) = -L_1\dot{\theta}_{3/2}\overrightarrow{y_1} - L_2\dot{\theta}_{3/2}\overrightarrow{y_2}$$

Soit finalement :

$$\begin{aligned}\vec{V}(D,3/0) = &-L_1\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{y_1} - L_1\dot{\theta}_{3/2}\overrightarrow{y_1} - L_2\dot{\theta}_{3/2}\overrightarrow{y_2} + (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})L_1\overrightarrow{y_1} \\ &+ (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})L_2\overrightarrow{y_2} + (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})L_3\overrightarrow{y_3}\end{aligned}$$

$$\vec{V}(D,3/0) = \dot{\theta}_{1/0}L_1\overrightarrow{y_1} + (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})L_2\overrightarrow{y_2} + (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})L_3\overrightarrow{y_3}$$

On a fait apparaître des termes lors de l'application de Varignon au départ qui sont inutiles, et qui finissent par disparaître.

Remarque : dans certains cas, les deux méthodes fonctionnent aussi bien, mais c'est par chance !

• **Très mauvaise méthode : Composition puis dérivation du vecteur position**

Une très grosse erreur que certains font est la suivante. On compose d'abord le mouvement, ce qui est bien :

$$\vec{V}(D,3/0) = \vec{V}(D,3/2) + \vec{V}(D,2/1) + \vec{V}(D,1/0)$$

Mais au lieu d'utiliser la formule de Varignon, on cherche à calculer chacune des vitesses ci-dessus par dérivation du vecteur position :

$$\vec{V}(D,3/2) = \left.\frac{d\overrightarrow{CD}}{dt}\right)_2 = \left.\frac{dL_3\overrightarrow{x_3}}{dt}\right)_2 = L_3\dot{\theta}_{3/2}\overrightarrow{y_3} \quad \boldsymbol{OK}$$

Concernant les deux autres termes, on va écrire :

$$\vec{V}(D,2/1) = \left.\frac{d\overrightarrow{BD}}{dt}\right)_1 ; \vec{V}(D,1/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{AD}}{dt}\right)_0$$

Si nous calculons sans réfléchir ces deux termes, nous écrivons :

$$\vec{V}(D,2/1) = \left.\frac{d\overrightarrow{BD}}{dt}\right)_1 = \left.\frac{d(L_2\overrightarrow{x_2} + L_3\overrightarrow{x_3})}{dt}\right)_1 = L_2\left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right)_1 + L_3\left.\frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt}\right)_1$$

$$\cancel{\vec{V}(D,2/1) = L_2\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{y_2} + L_3(\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1})\overrightarrow{y_3}}$$

Ce résultat est faux !!! Mais il est difficile de s'en rendre compte

En effet, écrire $\vec{V}(D,2/1) = \left.\frac{d\overrightarrow{BD}}{dt}\right)_1$ consiste en réalité à imaginer un point D' confondu avec le point D mais tel que ce point appartienne à la pièce 2 et non à la pièce 3, c'est-à-dire que le seul mouvement considéré est le mouvement de 2 par rapport à 1, ce qui revient à faire comme si la rotation 3/2 n'existait pas.

On a alors, en réalité :

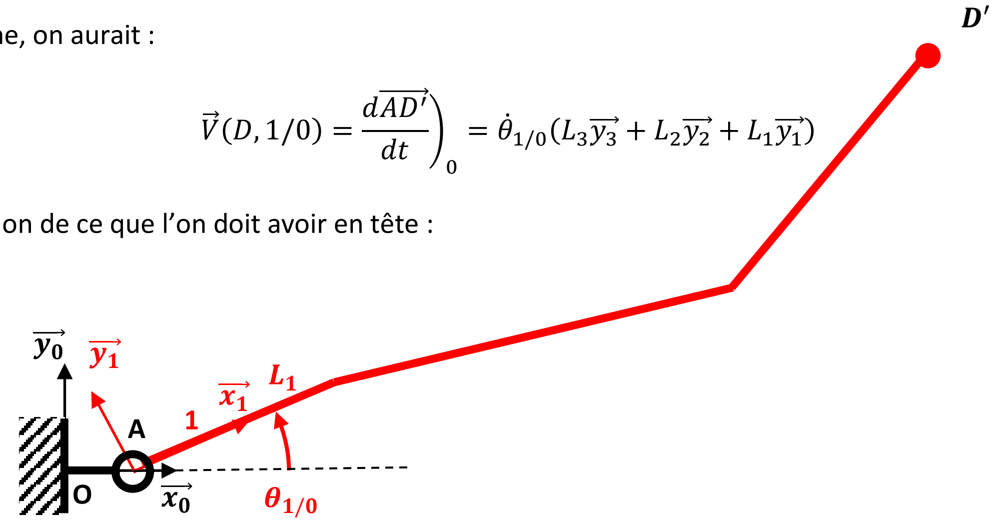
$$\vec{V}(D,2/1) = \left.\frac{d\overrightarrow{BD'}}{dt}\right)_1 = L_2\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{y_2} + L_3\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{y_3} = \dot{\theta}_{2/1}(L_2\overrightarrow{y_2} + L_3\overrightarrow{y_3})$$

Ce résultat est identique au résultat faux précédent avec $\dot{\theta}_{3/2} = 0$.

De même, on aurait :

$$\vec{V}(D,1/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{AD'}}{dt}\right)_0 = \dot{\theta}_{1/0}(L_3\overrightarrow{y_3} + L_2\overrightarrow{y_2} + L_1\overrightarrow{y_1})$$

Illustration de ce que l'on doit avoir en tête :



Au final, on trouve bien :

$$\vec{V}(D,3/0) = L_3\dot{\theta}_{3/2}\overrightarrow{y_3} + \dot{\theta}_{2/1}(L_2\overrightarrow{y_2} + L_3\overrightarrow{y_3}) + \dot{\theta}_{1/0}(L_3\overrightarrow{y_3} + L_2\overrightarrow{y_2} + L_1\overrightarrow{y_1})$$

$$\vec{V}(D,3/0) = \dot{\theta}_{1/0}L_1\overrightarrow{y_1} + (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})L_2\overrightarrow{y_2} + (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})L_3\overrightarrow{y_3}$$

Conclusions :

Lorsqu'il y a plusieurs mouvements entre plusieurs pièces, écrire une dérivation de vecteur position $\vec{V}(M,j/i) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_i$ avec une seule liaison entre i et j consiste à écrire :

$$\vec{V}(M,j/i) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM'}}{dt}\right)_i$$

Avec :

- M' le point confondu avec M mais appartenant à la pièce j
- Non prise en compte des mouvements autres que le mouvement j/i

Personne n'y pense !

NE JAMAIS FAIRE COMPOSITION PUIS DERIVAION DE VECTEURS POSITION

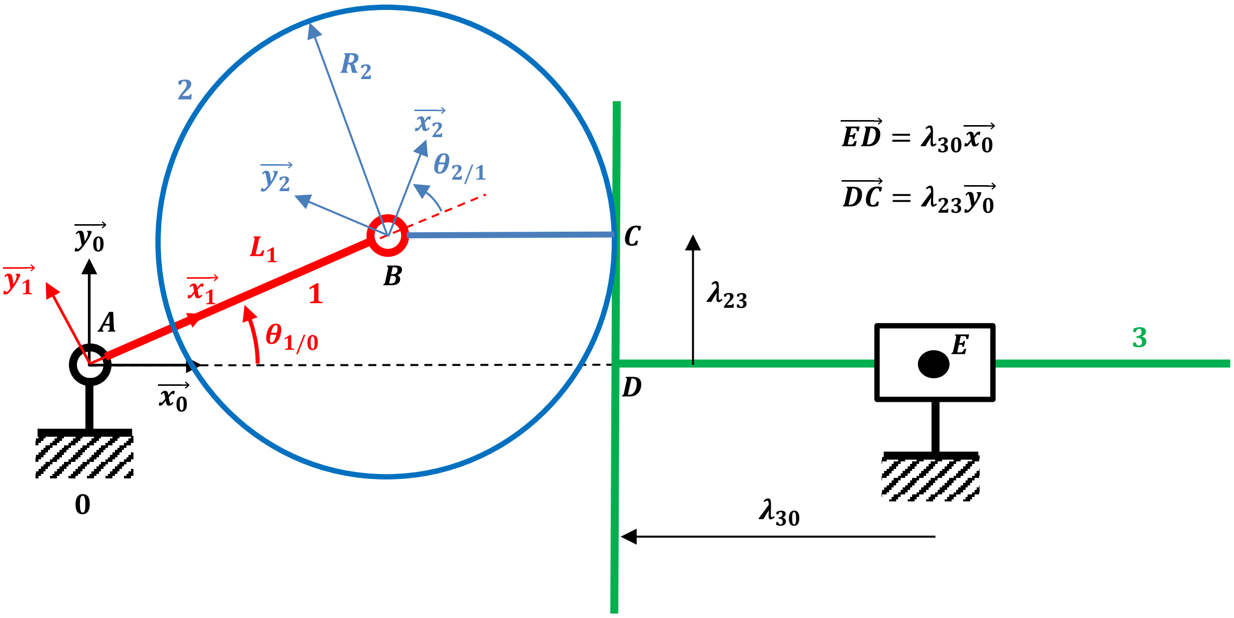
Conclusion : pour éviter ces soucis

Lors du calcul $\vec{V}(M,j/i) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_i$, avec une seule liaison entre i et j, si M n'est pas physiquement un point de j, utiliser la formule de Varignon pour calculer la vitesse $\vec{V}(M,j/i)$

Remarque : s'il y a plusieurs liaisons entre i et j, il faut composer le mouvement d'abord, pusi utiliser Varignon.

A.III.4.e.ii Exemple 2

Soit le mécanisme suivant :



Dans le cas de calcul de vitesses en présence de points de contact, une erreur classique est à éviter. Elle réside dans la définition du vecteur $\overrightarrow{BC}$:

Du fait du contact, on peut toujours écrire :

$$\overrightarrow{BC} = R_2\overrightarrow{x_0}$$

Toutefois, si l'on calcul la vitesse $\vec{V}(C,2/0)$, on va écrire :

- Composition puis Varignon (OK) :

$$\vec{V}(C,2/0) = \vec{V}(C,2/1) + \vec{V}(C,1/0)$$
$$\vec{V}(C,2/1) = \vec{V}(B,2/1) + \overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{\Omega_{21}} = -R_2\overrightarrow{x_0}\wedge\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{z_0} = R_2\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{y_0}$$
$$\vec{V}(C,1/0) = \vec{V}(A,1/0) + \overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{\Omega_{10}} = -R_2\overrightarrow{x_0}\wedge\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{z_0} - L_1\overrightarrow{x_1}\wedge\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{z_0} = R_2\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_0} + L_1\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}$$
$$\vec{V}(C,2/0) = R_2\left(\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10}\right)\overrightarrow{y_0} + L_1\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}$$

- Dérivation du vecteur position (Non OK) :

$$\vec{V}(C,2/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{AC}}{dt}\right)_0 = L_1\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0 + R_2\left.\frac{d\overrightarrow{x_0}}{dt}\right)_0 = L_1\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}$$

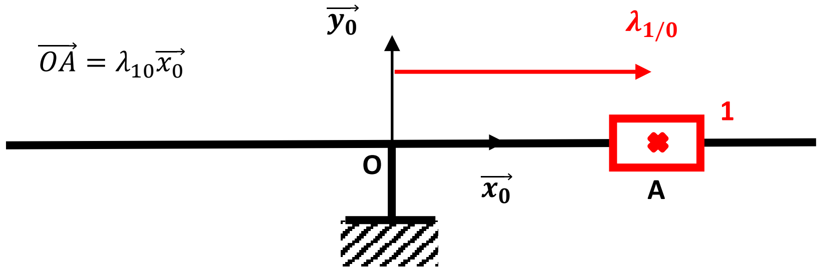
On voit qu'il y a une erreur, on ne trouve pas le même résultat. La première formule est juste, pas la seconde. L'erreur consiste à écrire $\overrightarrow{BC} = R_2\overrightarrow{x_0}$, ce qui induit une perte de renseignement sur le fait que la pièce 2 tourne. On a fait le calcul dans le cas particulier où $\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_0}$, ou encore $\theta_{21} + \theta_{10} = 0$, ce qui n'est pas le cas général !!! Donc :

Dans le cas de présence de contact, privilégier la méthode Composition - Varignon

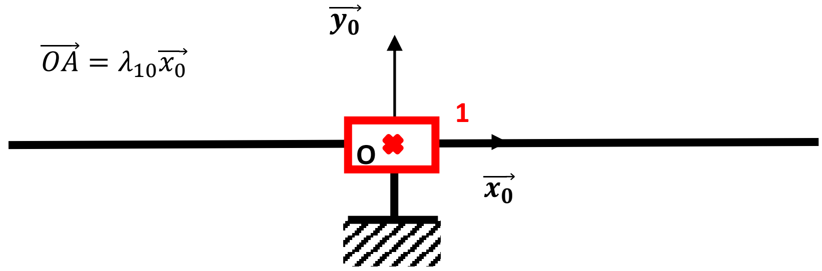
Une solution consiste à utiliser $\overrightarrow{x_2}$ en définissant $\overrightarrow{BC} = R_2\overrightarrow{x_2}$ dans le cas particulier où $\theta_{21} = -\theta_{10}$, ce qui conduit au bon résultat par dérivation du vecteur position.

A.III.4.e.iii Exemple 3

Soit le mécanisme suivant :



Représentons-le maintenant dans une position bien particulière où $\lambda_{10} = 0$:



Pour calculer $\vec{V}(A, 1/0)$:

- Ecrire immédiatement $\vec{V}(A, 1/0) = \dot{\lambda}_{10}\overrightarrow{x_0}$ est juste
- Ecrire la dérivée du vecteur position peut conduire à des erreurs :
  - $\vec{V}(A, 1/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_0$ sera juste si on pense à écrire $\overrightarrow{OA} = \lambda_{10}\overrightarrow{x_0}$
  - Mais on risque d'écrire $\vec{V}(A, 1/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OO}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{AA}}{dt}\right)_0 = \vec{0}$

Ici aussi, il faut en réalité avoir en tête qu'on s'intéresse au point A qui est « par-dessus » O à l'instant de la photo…

A.III.4.e.iv Conclusion générale

Pour calculer $\vec{V}(M, j/i)$:

- $M \in j$
  - La **dérivation du vecteur position** donne le résultat le plus rapidement possible
  - On peut **composer le mouvement si nécessaire puis utiliser Varignon**
- $M \notin j$
  - La dérivation du vecteur position conduit à des erreurs
  - Préférer **composer le mouvement si nécessaire puis utiliser la formule de Varignon**
- En cas de présence de contact, préférer la méthode **Composition puis Varignon**

A.III.4.f Composition des accélérations

Il existe une relation de composition des accélérations, elle est donnée ici à titre d'information.

$$\vec{\Gamma}(M,k/i)=\vec{\Gamma}(M,k/j)+\vec{\Gamma}(M,j/i)+k\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\vec{V}(M,k/j)$$

Démonstration :

$$\vec{V}(M,k/i)=\vec{V}(M,k/j)+\vec{V}(M,j/i)$$

Soit I un point fixe dans j.

$$\vec{V}(M,k/i)=\vec{V}(M,k/j)+\vec{V}(I,j/i)+\overrightarrow{MI}\Lambda\overrightarrow{\Omega_{j/i}}$$

$$\left.\frac{d\vec{V}(M,k/i)}{dt}\right)_i=\left.\frac{d\vec{V}(M,k/j)}{dt}\right)_i+\left.\frac{d\vec{V}(I,j/i)}{dt}\right)_i+\left.\frac{d\left(\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\overrightarrow{IM}\right)}{dt}\right)_i$$

$$\vec{\Gamma}(M,k/i)=\left.\frac{d\vec{V}(M,k/j)}{dt}\right)_j+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\vec{V}(M,k/j)+\vec{\Gamma}(I,j/i)+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\left.\frac{d\overrightarrow{IM}}{dt}\right)_i+\left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{j/i}}}{dt}\right)_i\Lambda\overrightarrow{IM}$$

$$\vec{\Gamma}(M,k/i)=\vec{\Gamma}(M,k/j)+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\vec{V}(M,k/j)+\vec{\Gamma}(I,j/i)+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\left.\frac{d\overrightarrow{IM}}{dt}\right)_j+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\left(\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\overrightarrow{IM}\right)$$
$$+\left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{j/i}}}{dt}\right)_i\Lambda\overrightarrow{IM}$$

$$\vec{\Gamma}(M,k/i)=\vec{\Gamma}(M,k/j)+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\vec{V}(M,k/j)+\vec{\Gamma}(I,j/i)+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\vec{V}(M,k/j)+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\left(\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\overrightarrow{IM}\right)$$
$$+\left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{j/i}}}{dt}\right)_i\Lambda\overrightarrow{IM}$$

Or

$$\vec{\Gamma}(M,j/i)=\vec{\Gamma}(I,j/i)+\left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{j/i}}}{dt}\right)_i\Lambda\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\left(\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\overrightarrow{IM}\right)$$

$$\vec{\Gamma}(M,k/i)=\vec{\Gamma}(M,k/j)+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\vec{V}(M,k/j)+\vec{\Gamma}(M,j/i)+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\vec{V}(M,k/j)$$

$$\vec{\Gamma}(M,k/i)=\vec{\Gamma}(M,k/j)+\vec{\Gamma}(M,j/i)+k\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\vec{V}(M,k/j)$$

A.III.5 Outil de représentation du mouvement – Torseur cinématique

Tout mouvement est décrit par

- Un vecteur vitesse
- Un vecteur rotation

La présence d'une rotation induit un changement de la vitesse selon le point auquel elle est exprimée :

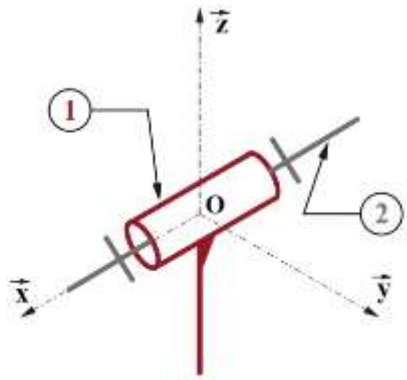
$$\vec{V}(B,j/i) = \vec{V}(A,j/i) + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB}$$

Il est donc nécessaire de toujours garder, pour chaque mouvement entre pièces, le vecteur rotation en parallèle du vecteur vitesse afin d'être en mesure d'exprimer la vitesse de tout point.

Dans un souci de clarté, nous choisissons donc pour chaque mouvement, de regrouper le vecteur rotation et le vecteur vitesse dans un même outil, que l'on appelle torseur, notation utilisée pour représenter des champs équiprojectifs.

A.III.5.a Introduction des torseurs par l'exemple

Soit une liaison pivot d'axe $(0,\vec{x})$ entre deux pièces 1 et 2.



Soit un point P quelconque de l'espace : $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$

On sait que la vitesse de tout point de l'axe de rotation $(0,\vec{x})$ dans le mouvement de 2 par rapport à 1 est nulle.

$$\forall P \in (0,\vec{x}), \vec{V}(P,2/1) = \vec{0}$$

On peut donc définir le mouvement de 2 par rapport à 1 quel que soit le point de l'axe de rotation ainsi :

- Présence d'une rotation : $\overrightarrow{\Omega_{21}} = P_{21}\vec{x}$
- $\vec{V}(P,2/1) = \vec{0} \ \forall P \in (0,\vec{x})$

Si on souhaite exprimer la vitesse d'un point P quelconque de l'espace, on utilise la formule de changement de point (Varignon) :

$$\vec{V}(P,2/1) = \vec{V}(O,2/1) + \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{21}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -z\Omega_{21} \\ y\Omega_{21} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

On retrouve bien le fait que si $y = z = 0$, c'est-à-dire sur l'axe de rotation, $\vec{V}(P,2/1) = \vec{0}$

On peut alors définir le mouvement de tout point de l'espace dans le mouvement de 2 par rapport à 1 ainsi :

- Présence d'une rotation : $\overrightarrow{\Omega_{21}} = P_{21}\vec{x}$
- $\vec{V}(P,2/1) = -z\Omega_{21}\vec{y} + y\Omega_{21}\vec{z}\ \forall P$

On voit que pour définir le mouvement entre les pièces 1 et 2, on doit nécessairement connaître

- le mouvement de rotation
- une vitesse en un point, ici sur l'axe car elle est nulle

On utilise donc une notation permettant de regrouper ces deux éléments, l'outil est appelé « Torseur » :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \vec{V}(P,2/1) \end{Bmatrix}_{\forall P}$$

Ensuite, si l'on reprend les résultats précédents, on voit que définir le mouvement associé à la liaison pivot consiste à donner l'un de ces torseurs :

$\forall P \in (0,\vec{x})$	$\forall P(x,y,z)$
$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{21}\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_P = \begin{Bmatrix} P_{21} & U_{j/i} \\ 0 & V_{j/i} \\ 0 & W_{j/i} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0}$	$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{21}\vec{x} \\ -z\Omega_{21}\vec{y} + y\Omega_{21}\vec{z} \end{Bmatrix}_P = \begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ 0 & -z\Omega_{21} \\ 0 & y\Omega_{21} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0}$

Ne parlons pas de l'éventuel choix d'une base ne contenant pas l'axe de rotation…

Il semble donc évident que pour décrire le mouvement associé à une liaison pivot, on retiendra la solution de gauche, c'est-à-dire :

- le torseur sous forme canonique (le plus de 0 possible)

- en un point de « son lieu de validité », c'est-à-dire où sa forme canonique est maintenue, ou encore un point ou son moment est minimum

On pourra alors aisément calculer la vitesse d'un point quelconque de l'espace à l'aide de la formule de Varignon, connaissant ce torseur en un lieu bien défini.

Il en sera de même pour toutes les liaisons.

A.III.5.b Notations

Le torseur cinématique est noté :

$$\{\mathcal{V}_{j/i}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{V}(M,j/i) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} P_{j/i}\overrightarrow{x_0} + Q_{j/i}\overrightarrow{y_0} + R_{j/i}\overrightarrow{z_0} \\ U_{j/i}\overrightarrow{x_0} + V_{j/i}\overrightarrow{y_0} + W_{j/i}\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} P_{j/i} & U_{j/i} \\ Q_{j/i} & V_{j/i} \\ R_{j/i} & W_{j/i} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0}$$

$\overrightarrow{\Omega_{j/i}}$ est appelé la résultante du torseur. Ses composantes dans la base $\mathfrak{B}_0$ sont $P_{j/i}$, $Q_{j/i}$ et $R_{j/i}$

$\vec{V}(M,j/i)$ est appelé le moment du torseur. Ses composantes dans la base $\mathfrak{B}_0$ sont $U_{j/i}$, $V_{j/i}$ et $W_{j/i}$

La notation $\{\mathcal{V}_{j/i}\}$ est indépendante du point où sera exprimé le torseur.

La notation vectorielle $\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{V}(M,j/i) \end{Bmatrix}_M$ a l'obligation d'être exprimée en un point qu'il faut préciser.

La notation verticale $\begin{Bmatrix} P_{j/i} & U_{j/i} \\ Q_{j/i} & V_{j/i} \\ R_{j/i} & W_{j/i} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0}$ doit être utilisée en précisant la base. Cette notation sera uniquement utilisée pour apprendre les torseurs, puis lorsqu'ils seront posés, on repassera à la notation vectorielle.

Quel que soit le point où le torseur est exprimé, le vecteur rotation reste constant.

Selon le point choisi, le vecteur vitesse change et est exprimé à l'aide de la formule de changement de Varignon :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{V}(M,j/i) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{V}(N,j/i) \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{V}(M,j/i) + \overrightarrow{NM}\Lambda\overrightarrow{\Omega_{j/i}} \end{Bmatrix}_N$$

A.III.5.c Remarques

A.III.5.c.i Passage d'une notation à l'autre

Nous allons bientôt introduire les torseurs associés à chaque liaison usuelle rencontrée dans les mécanismes. L'écriture en notations verticales permet de retenir facilement ces torseurs. Toutefois, il faut savoir repasser immédiatement à une écriture avec résultante et moment :

$$\{\mathcal{V}_{j/i}\} = \begin{Bmatrix} P_{j/i} & U_{j/i} \\ Q_{j/i} & V_{j/i} \\ R_{j/i} & W_{j/i} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_k} = \begin{Bmatrix} P_{j/i}\overrightarrow{x_k} + Q_{j/i}\overrightarrow{y_k} + R_{j/i}\overrightarrow{z_k} \\ U_{j/i}\overrightarrow{x_k} + V_{j/i}\overrightarrow{y_k} + W_{j/i}\overrightarrow{z_k} \end{Bmatrix}_M$$

Lors du déplacement d'un torseur en un point particulier, il peut arriver deux situations :

- Résultante et/ou moment s'expriment selon une seule base
- Résultante et/ou moment s'expriment dans plusieurs bases

Lorsque les éléments de réduction s'expriment dans une seule base, nous garderons la notation verticale.

Lorsqu'ils s'expriment dans plusieurs bases, nous adopterons la notation en résultante et moment afin de **ne pas projeter** de vecteurs inutilement.

A.III.5.c.ii Notation i/j et j/i - Signe

$$\overrightarrow{\Omega_{j/i}} = -\overrightarrow{\Omega_{i/j}}$$

$$\vec{V}(M,j/i) = -\vec{V}(M,i/j)$$

On a donc :

$$\{\mathcal{V}_{j/i}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{V}(M,j/i) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} -\overrightarrow{\Omega_{i/j}} \\ -\vec{V}(M,i/j) \end{Bmatrix}_M = -\{\mathcal{V}_{i/j}\}$$

On pourra donc noter :

$$\{\mathcal{V}_{j/i}\} = \begin{Bmatrix} P_{j/i} & U_{j/i} \\ Q_{j/i} & V_{j/i} \\ R_{j/i} & W_{j/i} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_k} = \begin{Bmatrix} -P_{i/j} & -U_{i/j} \\ -Q_{i/j} & -V_{i/j} \\ -R_{i/j} & -W_{i/j} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_k}$$

Toutefois, moins il y a de signes moins, moins ils risquent de disparaître malencontreusement.

A.III.5.c.iii Composition du mouvement et torseurs

$$\{\mathcal{V}_{k/j}\} + \{\mathcal{V}_{j/i}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{k/j}} \\ \vec{V}(M,k/j) \end{Bmatrix}_M + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{V}(M,j/i) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{k/i}} \\ \vec{V}(M,k/i) \end{Bmatrix}_M = \{\mathcal{V}_{k/i}\}$$

$$\{\mathcal{V}_{k/j}\} + \{\mathcal{V}_{j/i}\} = \{\mathcal{V}_{k/i}\}$$

A.III.5.c.iv Torseur d'un mouvement quelconque

Un torseur est un outil qui n'est pas uniquement associé à une liaison. On peut exprimer un mouvement quelconque à l'aide d'un torseur. Il suffit d'identifier le vecteur rotation du mouvement considéré et de calculer une vitesse en un point dans ce mouvement pour ensuite écrire le torseur du mouvement associé.

A.III.5.d Torseurs particuliers

A.III.5.d.i Glisseur

Un torseur de type glisseur est un torseur dont le champ de moment est nul en au moins un point. En cinématique, cela correspond à un torseur dont la vitesse s'annule en au moins un point, au CIR d'un mouvement de rotation. Le moment du torseur est nul sur l'axe de rotation, appelé axe central du torseur.

$$\exists M / \{\mathcal{V}_{j/i}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M$$

Le champ des vitesses dans un mouvement de rotation est un glisseur.

A.III.5.d.ii Torseur couple

Un torseur de type couple est un torseur dont la résultante est nulle. En cinématique, cela correspond à un vecteur rotation nul. Un mouvement de translation est un mouvement représenté par un torseur de type couple.

$$\forall M, \{\mathcal{V}_{j/i}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}(M,j/i) \end{Bmatrix}_M$$

La particularité de ce torseur est d'être le même en tout point de l'espace.

Démonstration :

$$\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}(M,j/i) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}(N,j/i) \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}(M,j/i) + \overrightarrow{NM} \wedge \vec{0} \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}(M,j/i) \end{Bmatrix}_N$$

A.III.5.d.iii Remarque

En cinématique :

- Tout mouvement est décrit par l'un de ces deux torseurs
- Un torseur couple est un torseur associé à une translation
- Un torseur glisseur est associé à tout autre mouvement. Autrement dit, un mouvement qui n'est pas une translation est une rotation autour d'un point, fixe ou mobile, auquel cas on l'appelle CIR ou Centre Instantanée de Rotation

De même, en statique, toute action mécanique est représentée soit par un couple, soit pas un glisseur

A.III.5.e Opérations sur les torseurs

A.III.5.e.i Automoment : invariant scalaire

On appelle automoment d'un torseur le produit scalaire de sa résultante et de son moment.

L'automoment est un invariant scalaire, c'est-à-dire que c'est un nombre réel constant.

$$\{\mathcal{V}_{j/i}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{V}(M,j/i) \end{Bmatrix}_M$$

$$\forall N,M: \overrightarrow{\Omega_{j/i}}.\vec{V}(M,j/i) = \overrightarrow{\Omega_{j/i}}.\vec{V}(N,j/i)$$

Démonstration :

$$\overrightarrow{\Omega_{j/i}}.\vec{V}(M,j/i) = \overrightarrow{\Omega_{j/i}}.\left[\vec{V}(N,j/i) + \overrightarrow{MN}\Lambda\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\right] = \overrightarrow{\Omega_{j/i}}.\vec{V}(N,j/i) + \overrightarrow{\Omega_{j/i}}.\overrightarrow{MN}\Lambda\overrightarrow{\Omega_{j/i}} = \overrightarrow{\Omega_{j/i}}.\vec{V}(N,j/i)$$

Utilité :

L'automoment est utile pour vérifier qu'un torseur est juste suite à un changement de point par exemple.

A.III.5.e.ii Comoment

Le comoment de deux torseurs est la somme du produit de la résultante de l'un avec le moment de l'autre et du moment de l'un avec la résultante de l'autre lorsque les torseurs sont exprimés au même point.

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\}X\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \vec{V}(M,2/1) \end{Bmatrix}_M X \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \vec{V}(N,1/0) \end{Bmatrix}_N = \overrightarrow{\Omega_{2/1}}.\vec{V}(P,1/0) + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}.\vec{V}(P,2/1) \quad \forall P$$

Le comoment sera très utile lors du calcul de puissance dissipée dans des liaisons, par l'intermédiaire du comoment du torseur statique et cinématique de la liaison.

A.III.5.e.iii Addition

Pour additionner deux torseurs, il faut qu'ils soient **exprimés au même point**. Le résultat est un torseur dont la résultante est la somme des résultantes des deux torseurs et le moment la somme des deux moments exprimés au même point.

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \vec{V}(M,2/1) \end{Bmatrix}_M + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \vec{V}(N,1/0) \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \vec{V}(P,2/1) + \vec{V}(P,1/0) \end{Bmatrix}_P \quad \forall P$$

Attention : en notation verticale, les torseurs doivent de plus être **exprimés dans la même base** :

$$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ Q_{2/1} & V_{2/1} \\ R_{2/1} & W_{2/1} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0} + \begin{Bmatrix} P_{1/0} & U_{1/0} \\ Q_{1/0} & V_{1/0} \\ R_{1/0} & W_{1/0} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} + P_{1/0} & U_{2/1} + U_{1/0} \\ Q_{2/1} + Q_{1/0} & V_{2/1} + Q_{1/0} \\ R_{2/1} + R_{1/0} & W_{2/1} + R_{1/0} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0}$$

A.III.5.e.iv Multiplication par un scalaire

Lorsqu'un torseur est multiplié par un scalaire, on multiplie résultante et moment par ce scalaire.

$$\{\mathcal{V}_{j/i}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{V}(M,j/i) \end{Bmatrix}_M$$

$$k\{\mathcal{V}_{j/i}\} = \begin{Bmatrix} k\overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ k\vec{V}(M,j/i) \end{Bmatrix}_M$$

A.III.5.e.v Egalité de deux torseurs

Il faut que les torseurs soient **exprimés au même point**.

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \{\mathcal{V}_{1/0}\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \vec{V}(M,2/1) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \vec{V}(N,1/0) \end{Bmatrix}_N$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \ (1) \\ \vec{V}(P,2/1) = \vec{V}(P,1/0) \ (2) \end{cases}$$

L'égalité de deux torseurs donne deux équations vectorielles. Lorsque l'on projette ces deux vecteurs dans une même base, on obtient 6 équations scalaires :

$$\begin{gathered} (1).\overrightarrow{x_0} \rightarrow P_{2/1} = P_{1/0} \\ (1).\overrightarrow{y_0} \rightarrow Q_{2/1} = Q_{1/0} \\ (1).\overrightarrow{z_0} \rightarrow R_{2/1} = R_{1/0} \\ (2).\overrightarrow{x_0} \rightarrow U_{2/1} = U_{1/0} \\ (2).\overrightarrow{y_0} \rightarrow V_{2/1} = V_{1/0} \\ (2).\overrightarrow{z_0} \rightarrow W_{2/1} = W_{1/0} \end{gathered}$$

Attention : en notation verticale, les torseurs doivent de plus être **exprimés dans la même base**.

Il vient alors :

$$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ Q_{2/1} & V_{2/1} \\ R_{2/1} & W_{2/1} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{1/0} & U_{1/0} \\ Q_{1/0} & V_{1/0} \\ R_{1/0} & W_{1/0} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0} \Leftrightarrow \begin{cases} P_{2/1} = P_{1/0} \\ Q_{2/1} = Q_{1/0} \\ R_{2/1} = R_{1/0} \\ U_{2/1} = U_{1/0} \\ V_{2/1} = V_{1/0} \\ W_{2/1} = W_{1/0} \end{cases}$$

Remarque : nous ne travaillerons pas avec cette notation et lui préfèrerons la notation vectorielle. Toutefois, nous apprendrons par cœur les torseurs des liaisons usuelles sous cette forme.