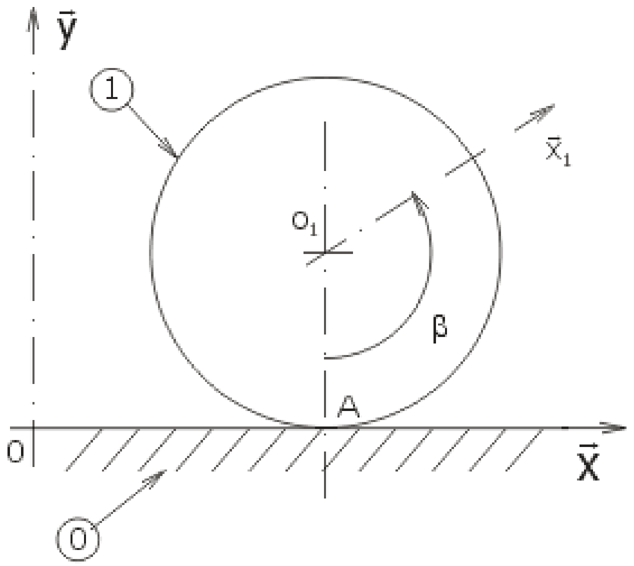
Enoncé

On se propose dans cet exercice d'utiliser uniquement la dérivation de vecteurs pour déterminer les vitesses ou accélérations des points des solides.

1 Soit une cerceau (1) de centre O_1 et de rayon R se déplaçant dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ et restant au contact de l'axe $(O, \vec{x}_0)$. Le point de contact à l'instant considéré entre le cerceau et l'axe est le point coïncident A. On lie le repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ au cerceau . L'axe $(O, \vec{x}_0)$ est repéré (0).



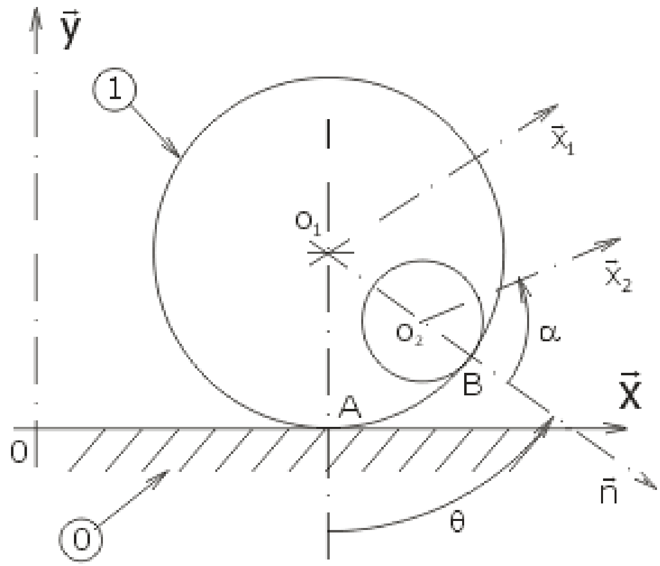
1.1 Montrer que la position du cerceau dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ dépend de deux paramètres.On prendra $x = \overrightarrow{OO_1}.\vec{x}_0$ et $\beta = \left(\overrightarrow{O_1A}, \vec{x}_1\right)$.

1.2 Déterminer la vitesse du point A appartenant au cerceau (1) par rapport à $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0) : \vec{V}(A \in 1/0)$

1.3 Déterminer la vitesse du point coïncident A entre (1) et (0) par rapport à $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0) : \vec{V}(A/0)$

1.4 Quelle est l'accélération du point A appartenant au cerceau (1) par rapport à $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0) : \vec{\Gamma}(A \in 1/0)$?

2 On rajoute à présent un autre cerceau (2) de centre O_2 et de rayon r (avec $r < R$) à l'intérieur du cerceau (1) . On suppose qu'à tout moment il y a contact entre les deux cerceaux. Le point de contact entre les deux cerceaux est noté B. On lie le repère $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$ au cerceau (2).



2.1 Montrer que l'introduction de ce nouveau cerceau nécessite deux nouveaux paramètres pour l'étude cinématique.

On prendra $\theta = \left(\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1B}\right)$, $\alpha = \left(\overrightarrow{O_2B}, \vec{x}_2\right)$, $\overrightarrow{O_1B} = R.\vec{n}$ et $\vec{v} = \vec{z}_0 \wedge \vec{n}$.

2.2 Déterminer la vitesse du point coïncident B par rapport à $R_0\left(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0\right)$: $\vec{V}\left(B/0\right)$

2.3 Déterminer la vitesse du point B appartenant à (1) par rapport à $R_0\left(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0\right)$: $\vec{V}\left(B \in 1/0\right)$

2.4 Déterminer la vitesse du point B appartenant à (2) par rapport à $R_0\left(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0\right)$: $\vec{V}\left(B \in 2/0\right)$

2.5 Déterminer la vitesse du point B appartenant à (2) par rapport à (1) : $\vec{V}\left(B \in 2/1\right)$

2.6 Déterminer la vitesse du point coïncident B par rapport à $R_1\left(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1\right)$: $\vec{V}\left(B/1\right)$

2.7 Déterminer la vitesse du point coïncident B par rapport à $R_2\left(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2\right)$: $\vec{V}\left(B/2\right)$

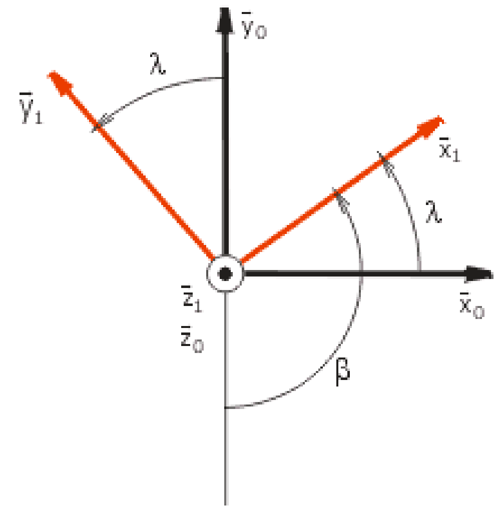
2.8 Déterminer l'accélération de B appartenant à (2) par rapport à $R_0\left(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0\right)$

Solution

1.1 Dans le cas d'un problème de ***cinématique plane*** les vitesses des points des solides n'ont pas de composante suivant une direction perpendiculaire au plan de glissement des solides (ici $\vec{z}_0$)) .Le solide (1) est normalement positionné par trois paramètres indépendants par rapport à $R_0\left(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0\right)$. On choisit normalement un point (Le centre géométrique O_1 du cerceau ; tel que $\overrightarrow{OO_1} = x.\vec{x}_0 + y.\vec{y}_0$) et un angle polaire traduisant la mobilité en rotation de la base $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$ liée à (1) par rapport à la base $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$. Le contact de (1) avec l'axe $(O, \vec{x}_0)$ crée des relations ***géométriques*** .

La relation géométrique de contact est telle que $\overrightarrow{OO_1}.\vec{y}_0 = cte = R$ ce qui entraîne $y_1 = R$. Il reste alors deux paramètres pour positionner (1) par rapport à (0).

1.2 Pour déterminer La vitesse du point A appartenant au cerceau par rapport à $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$, commençons par paramètrer entre-elles les bases $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$ et $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$



$$B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow{(\lambda, \vec{z}_0)} B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$$

Il est intéressant dans ce genre de problème de re-paramètrer les angles de façon à travailler avec un angle orienté positivement (sens trigo positif) et compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Dans ce cas de figure l'angle proposé est λ . L'étude est réalisée avec λ et il suffit dans le résultat final de remplacer λ par $\beta - \frac{\pi}{2}$ et $\dot{\lambda}$ par $\dot{\beta}$.

Pour déterminer maintenant $\vec{V}(A \in 1/0)$ il faut utiliser des fonctions vectorielles faisant apparaître les paramètres de position du solide (1) par rapport au solide (0). On peut utiliser différentes techniques :

* Utilisons dans un premier temps la dérivée du vecteur position : $\vec{V}(A \in 1/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R_0}$.

$$\vec{V}(A \in 1/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1A}}{dt}\right)_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right)_{R_0} + \underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt}\right)_{R_0}}_{\left.\frac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt}\right)_{R_1} + \overrightarrow{O_1A} \wedge \vec{\Omega}_{0/1}}$$

$$\vec{V}(A\in 1/0) = \dot{x}.\vec{x}_0 + \underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt}\right)_{R_1}}_{0} + \overrightarrow{O_1A}\wedge\vec{\Omega}_{0/1} = \dot{x}.\vec{x}_0 - R.\vec{y}_0\wedge\left(-\dot{\lambda}.\vec{z}_0\right)$$

On trouve donc $\boxed{\vec{V}(A\in 1/0) = \left(\dot{x}+R.\dot{\lambda}\right).\vec{x}_0 = \left(\dot{x}+R.\dot{\beta}\right).\vec{x}_0}$

* La seconde méthode consiste à utiliser l'expression de la vitesse généralisée. Le solide (1) est positionné par rapport à (0) par les paramètres x et λ . L'expression de la vitesse sera donc :

$$\vec{V}(A\in 1/0) = \frac{\partial\overrightarrow{OA}}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\overrightarrow{OA}}{\partial\lambda}.\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \frac{\partial\left(\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1A}\right)}{\partial x}.\dot{x} + \frac{\partial\left(\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1A}\right)}{\partial\lambda}.\dot{\lambda}$$

$$\vec{V}(A\in 1/0) = \frac{\partial\overrightarrow{OO_1}}{\partial x}.\dot{x} + \frac{\partial\overrightarrow{O_1A}}{\partial\lambda}.\dot{\lambda} = \frac{\partial\left(x.\vec{x}_0 + R.\vec{y}_0\right)}{\partial x}.\dot{x} + \frac{\partial\overrightarrow{O_1A}}{\partial\lambda}.\dot{\lambda}$$

A ce stade , il ne faut pas remplacer $\overrightarrow{O_1A}$ par $-R.\vec{y}_0$ car le vecteur $\overrightarrow{O_1A}$, lié en propre à (1) , est une fonction vectorielle dépendant de λ . L'erreur serait de confondre $\overrightarrow{O_1A}$ lié à (1) avec $\overrightarrow{O_1A}$ coïncident du repère $R_0\left(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0\right)$

On a donc $\vec{V}(A\in 1/0) = \vec{x}_0.\dot{x} - R.\underbrace{\frac{\partial\left(\frac{\overrightarrow{O_1A}}{R}\right)}{\partial\lambda}}_{-\vec{x}_0}.\dot{\lambda}$ car la dérivée du vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{O_1A}}{R}$, lié à (1), par rapport à λ , nous donne le vecteur perpendiculaire à $+\frac{\pi}{2}$ qui est $-\vec{x}_0$.

On trouve donc: $\boxed{\vec{V}(A\in 1/0) = \left(\dot{x}+R.\dot{\lambda}\right).\vec{x}_0 = \left(\dot{x}+R.\dot{\beta}\right).\vec{x}_0}$

* La dernière méthode nécessite l'utilisation des composantes d'un point quelconque M de (1) tel que $\overrightarrow{O_1M} = R\vec{x}_1$. On a alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} = x.\vec{x}_0 + y.\vec{y}_0 + R\vec{x}_1 = \left(x+R\cos\lambda\right).\vec{x}_0 + \left(y+R\sin\lambda\right).\vec{y}_0$. Si l'on cherche la vitesse de ce point par rapport à $R_0\left(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0\right)$, on a :

$$\vec{V}(M\in 1/0) = \left.\frac{d\left(\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1M}\right)}{dt}\right)_{R_0} = \left.\frac{d\left(\left(x+R\cos\lambda\right).\vec{x}_0 + \left(y+R\sin\lambda\right).\vec{y}_0\right)}{dt}\right)_{R_0} .$$

On trouve donc $\vec{V}(M\in 1/0) = \left(\dot{x}-R.\dot{\lambda}.\sin\lambda\right).\vec{x}_0 + \left(R.\dot{\lambda}.\cos\lambda\right).\vec{y}_0$. Le point A du cerceau est positionné par l'angle $\lambda = 3.\frac{\pi}{2}$. La vitesse de ce point appartenant à (1) sera donc :

$$\vec{V}(A\in 1/0) = \left(\dot{x}-R.\dot{\lambda}.\sin\left(3.\frac{\pi}{2}\right)\right).\vec{x}_0 + \left(R.\dot{\lambda}.\cos\left(3.\frac{\pi}{2}\right)\right).\vec{y}_0$$

et donc $\boxed{\vec{V}(A\in 1/0) = \left(\dot{x}+R.\dot{\lambda}\right).\vec{x}_0 = \left(\dot{x}+R.\dot{\beta}\right).\vec{x}_0}$

Nota : A partir de la relation sur le champ des vecteurs vitesses d'un solide, on obtient directement :

$$\vec{V}(A\in 1/0)=\underbrace{\vec{V}(O_1\in 1/0)}_{\left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right)_{R_0}}+\underbrace{\overrightarrow{AO_1}\wedge\vec{\Omega}_{10}}_{R.\vec{y}_0\wedge\dot{\lambda}\vec{z}_0}$$

et donc $\boxed{\vec{V}(A\in 1/0)=\dot{x}.\vec{x}_0+R.\dot{\lambda}\vec{x}_0=(\dot{x}+R.\dot{\beta}).\vec{x}_0}$

1.3 La vitesse du point géométrique coïncident est déterminée par :

$$\vec{V}(A/0)=\left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R_0}=\left.\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right)_{R_0}=\dot{x}.\vec{x}_0$$

On a donc :

$$\boxed{\vec{V}(A/0)=\dot{x}.\vec{x}_0}$$

1.4 L'accélération $\vec{\Gamma}(A\in 1/0)$ du point A appartenant au cerceau par rapport à $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ est :

$$\vec{\Gamma}(M\in 1/0)=\left.\frac{d^2\left((x+R\cos\lambda).\vec{x}_0+(y+R\sin\lambda).\vec{y}_0\right)}{dt^2}\right)_{R_0}=\left.\frac{d\left((\dot{x}-R.\dot{\lambda}.\sin\lambda).\vec{x}_0+(R.\dot{\lambda}.\cos\lambda).\vec{y}_0\right)}{dt}\right)_{R_0}$$

On trouve donc :

$$\vec{\Gamma}(M\in 1/0)=\left(\ddot{x}-R\left(\ddot{\lambda}.\sin\lambda+\dot{\lambda}^2.\cos\lambda\right)\right).\vec{x}_0+\left(R\left(\ddot{\lambda}.\cos\lambda-\dot{\lambda}^2.\sin\lambda\right)\right).\vec{y}_0$$

Dans le cas $\lambda=3.\frac{\pi}{2}$, nous pouvons déterminer l'accélération du point A :

$\vec{\Gamma}(A\in 1/0)=(\ddot{x}+R.\ddot{\lambda}).\vec{x}_0+(R.\dot{\lambda}^2).\vec{y}_0$ et donc $\boxed{\vec{\Gamma}(A\in 1/0)=(\ddot{x}+R.\ddot{\beta}).\vec{x}_0+(R.\dot{\beta}^2).\vec{y}_0}$

2.1 Le nouveau cerceau introduit normalement trois paramètres supplémentaires de position. On peut prendre par exemple la position du centre géométrique O_2 du cerceau (2) telle que $\overrightarrow{OO_2}=x_2.\vec{x}_0+y_2.\vec{y}_0$ et un angle polaire θ_2 lié à la rotation du cerceau (2) dans le plan $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$. Comme il existe un obstacle(le cerceau (1)) vis à vis du déplacement de (2) dans le plan $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$, il existe une relation géométrique entre les différents paramètres de position des deux cerceaux. Cette relation est : $\left\|\overrightarrow{O_1O_2}\right\|=cte=R-r=\sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-R)^2}$. Le système est donc à quatre degrés de liberté, car sur les cinq paramètres introduits pour positionner les cerceaux par rapport au repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$, du fait de cette dernière relation, il n'y en a que quatre de libres. Parmi les différentes possibilités offertes de choix de paramétrage, on retient le paramétrage suivant : x, β pour (1) et θ, α pour (2) .

2.2 Pour déterminer la vitesse du point coïncident B, dérivons le vecteur position $\overrightarrow{OB}$.

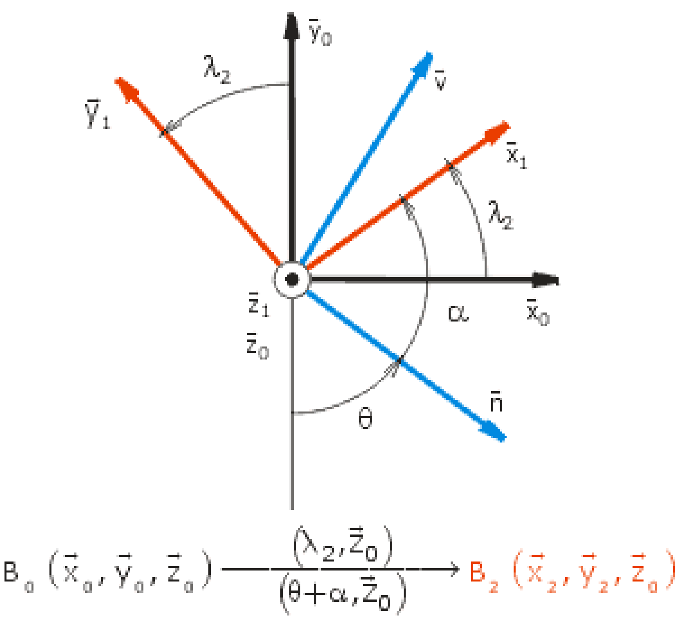
$$\vec{V}(B/0)=\left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_{R_0}=\left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right)_{R_0}+\left.\frac{d\overrightarrow{O_1B}}{dt}\right)_{R_0}=\left.\frac{d\left(x.\vec{x}_0+R.\vec{y}_0\right)}{dt}\right)_{R_0}+\left.\frac{dR.\vec{n}}{dt}\right)_{R_0}$$

et l'on trouve donc $\boxed{\vec{V}(B/0)=\dot{x}.\vec{x}_0+R.\dot{\theta}.\vec{v}}$

2.3 Pour déterminer $\vec{V}(B\in 1/0)$, utilisons le travail déjà réalisé pour $\vec{V}(A\in 1/0)$. La position du point B est définie par $\lambda=3.\frac{\pi}{2}+\theta=\theta-\frac{\pi}{2}$. En utilisant $\vec{V}(M\in 1/0)=\left(\dot{x}-R.\dot{\lambda}.\sin\lambda\right).\vec{x}_0+\left(R.\dot{\lambda}.\cos\lambda\right).\vec{y}_0$ pour cette valeur on obtient : $\vec{V}(B\in 1/0)=\left(\dot{x}+R.\dot{\lambda}.\cos\theta\right).\vec{x}_0+\left(R.\dot{\lambda}.\sin\theta\right).\vec{y}_0=\dot{x}.\vec{x}_0+R.\dot{\lambda}.\vec{v}$. On a donc $\vec{V}(B\in 1/0)=\dot{x}.\vec{x}_0+R.\dot{\lambda}.\vec{v}$ ce qui entraîne : $\boxed{\vec{V}(B\in 1/0)=\dot{x}.\vec{x}_0+R.\dot{\beta}.\vec{v}}$

Nota : le travail est bien-sûr plus simple en utilisant : $\vec{V}(B\in 1/0)=\vec{V}(O_1\in 1/0)+\overrightarrow{BO_1}\wedge\vec{\Omega}_{1/0}$.

2.4 Pour déterminer $\vec{V}(B\in 2/0)$, utilisons un nouveau paramètre γ qui paramètre la rotation du repère $R_2\left(O_2,\vec{x}_2,\vec{y}_2\right)$ par rapport au repère $R_0\left(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0\right)$. On a $\frac{\pi}{2}+\gamma=\theta+\alpha$ ce qui donne $\dot{\gamma}=\dot{\theta}+\dot{\alpha}$



Dans ces conditions on a pour tout point M lié à (2) et tel que $\overrightarrow{O_2M}=r.\vec{x}_2$:

$$\vec{V}(M\in 2/0)=\left.\frac{d\left(\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2M}\right)}{dt}\right)_{R_0}=\left.\frac{d\left(x.\vec{x}_0+y.\vec{y}_0+(R-r)\vec{n}+r.\vec{x}_2\right)}{dt}\right)_{R_0}=\dot{x}.\vec{x}_0+(R-r).\dot{\theta}.\vec{v}+r.\dot{\gamma}.\vec{y}_2$$

avec $\vec{y}_2=-\sin\gamma.\vec{x}_0+\cos\gamma.\vec{y}_0$. Pour la position B, $\alpha=0$ et donc $\gamma=3.\frac{\pi}{2}+\theta=\theta-\frac{\pi}{2}$; ce qui nous donne

$\vec{y}_2 = \cos\theta.\vec{x}_0 + \sin\theta.\vec{y}_0 = \vec{v}$. En utilisant ces constatations et le fait que $\dot{\gamma} = \dot{\theta} + \dot{\alpha}$, on a :

$\vec{V}(B \in 2/0) = \dot{x}.\vec{x}_0 + (R-r).\dot{\theta}.\vec{v} + r.(\dot{\theta} + \dot{\alpha}).\vec{v} = \dot{x}.\vec{x}_0 + (R\dot{\theta} + r\dot{\alpha}).\vec{v}$. Le résutat est donc :

$$\boxed{\vec{V}(B \in 2/0) = \dot{x}.\vec{x}_0 + (R\dot{\theta} + r\dot{\alpha}).\vec{v}}$$

2.5 Pour déterminer la vitesse $\vec{V}(B \in 2/1)$, utilisons la relation : $\vec{V}(B \in 2/1) = \left.\dfrac{d\,\overrightarrow{O_1B}}{dt}\right)_{R_1}$

$$\vec{V}(B \in 2/1) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{R_1} + \left.\frac{d\overrightarrow{O_2B}}{dt}\right)_{R_1}$$

$$\vec{V}(B \in 2/1) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{R_0} + \overrightarrow{O_1O_2} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} + \left.\frac{d\overrightarrow{O_2B}}{dt}\right)_{R_2} + \overrightarrow{O_2B} \wedge \vec{\Omega}_{1/2}$$

2.6 Pour déterminer la vitesse du point coïncident B par rapport à $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$: $\vec{V}(B/1)$, dérivons le vecteur position $\overrightarrow{O_1B}$: $\vec{V}(B/1) = \left.\dfrac{d\overrightarrow{O_1B}}{dt}\right)_{R_1} = \left.\dfrac{d(R.\vec{n})}{dt}\right)_{R_1} = R.\left(\left.\dfrac{d\vec{n}}{dt}\right)_{R_0} + \vec{n} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}\right) = R.(\dot{\theta}.\vec{v} + \vec{n} \wedge \dot{\beta}.\vec{z}_0)$. Nous obtenons :

$$\boxed{\vec{V}(B/1) = R.(\dot{\theta} - \dot{\beta}).\vec{v}}$$

2.7 Pour déterminer la vitesse du point coïncident B par rapport à $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$: $\vec{V}(B/2)$, dérivons comme dans le cas précédent le vecteur position $\overrightarrow{O_2B}$: $\vec{V}(B/2) = \left.\dfrac{d\overrightarrow{O_2B}}{dt}\right)_{R_2} = \left.\dfrac{d(r.\vec{n})}{dt}\right)_{R_2} =$

$$r.\left(\left.\frac{d\vec{n}}{dt}\right)_{R_0} + \vec{n} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}\right) = r.(\dot{\theta}.\vec{v} + \vec{n} \wedge (\dot{\theta} + \dot{\alpha}).\vec{z}_0)$$

Nous obtenons $\boxed{\vec{V}(B/2) = -r.\dot{\alpha}.\vec{v}}$

2.8 Pour déterminer l'accélération de B appartenant à (2) par rapport à $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ déterminons l'accélération d'un point M quelconque de (2) à partir de la vitesse $\vec{V}(M \in 2/0)$:

$$\vec{\Gamma}(M \in 2/0) = \left.\frac{d\left(\vec{V}(M \in 2/0)\right)}{dt}\right)_{R_0} = \left.\frac{d\left(\dot{x}.\vec{x}_0 + (R-r).\dot{\theta}.\vec{v} + r.\dot{\gamma}.\vec{y}_2\right)}{dt}\right)_{R_0} =$$

$$\ddot{x}.\vec{x}_0 + (R-r).(\ddot{\theta}.\vec{v} - \dot{\theta}^2\vec{n}) + r.(\ddot{\gamma}.\vec{y}_2 - \dot{\gamma}^2.\vec{x}_2)$$

Pour la position B, nous avons vu précédemment que $\alpha = 0$ et donc $\gamma = 3.\dfrac{\pi}{2} + \theta = \theta - \dfrac{\pi}{2}$ ce qui nous donne

$\vec{y}_2 = \cos\theta.\vec{x}_0 + \sin\theta.\vec{y}_0 = \vec{v}$

$$\vec{x}_2 = \cos\lambda_2.\vec{x}_0 + \sin\lambda_2.\vec{y}_0 = \sin\theta.\vec{x}_0 - \cos\theta.\vec{y}_0 = \vec{n}$$

et $\ddot{\lambda}_2 = \ddot{\theta} + \ddot{\alpha}$

L'expression de l'accélération devient :

$$\vec{\Gamma}\left(B \in 2/0\right) = \ddot{x}.\vec{x}_0 + \left(R - r\right).\left(\ddot{\theta}.\vec{v} - \dot{\theta}^2\vec{n}\right) + r.\left(\left(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}\right).\vec{v} - \left(\dot{\theta} + \dot{\alpha}\right)^2.\vec{n}\right)$$

et donc $\boxed{\vec{\Gamma}\left(B \in 2/0\right) = \ddot{x}.\vec{x}_0 + \left(R\ddot{\theta} + r\ddot{\alpha}\right).\vec{v} - \left(R\dot{\theta}^2 + r.\dot{\alpha}^2 + 2.r.\dot{\alpha}.\dot{\theta}\right).\vec{n}}$