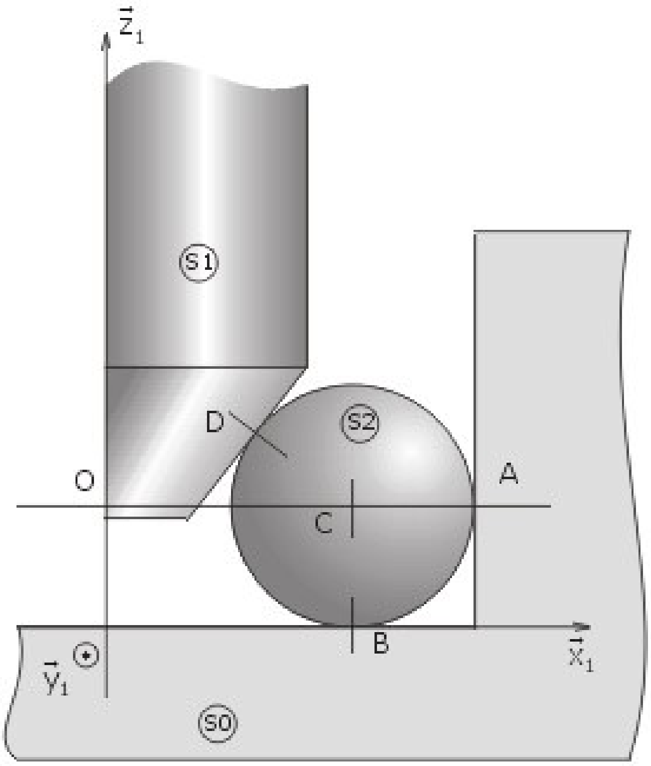
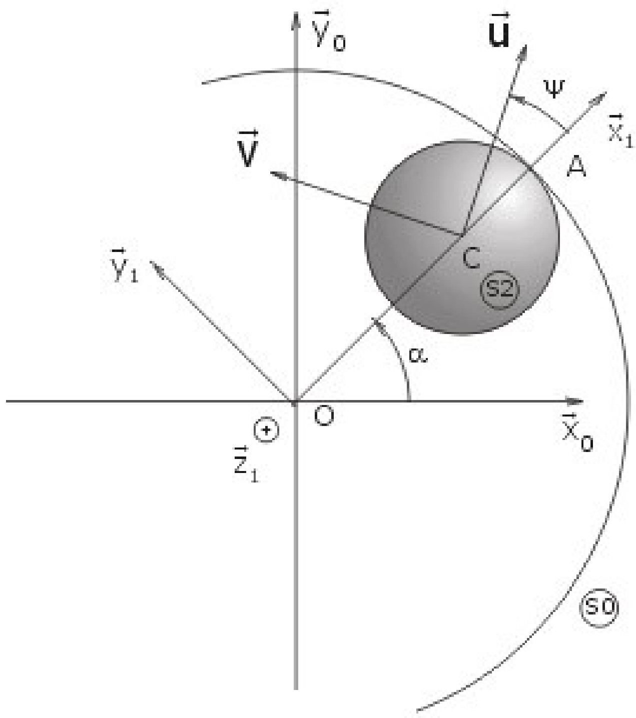
# Enoncé

Considérons une butée à billes constituée d'un ensemble de billes en contact avec un rotor (S1) et un bâti (S0). L'étude cinématique proposée ne s'intéresse qu'à une seule bille (S2) en contact avec le solide (S1) en D et en contact avec le solide (S0) en A et B. Le contact en B est de type Plan/Sphère tandis que celui de A est de type Cylindre/Sphère.




On considère:

$R(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_1)$ le repère lié au bâti (S0)

$R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ le repère lié au vecteur tournant $\overrightarrow{OC}$

$R_2(O,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ le repère lié à la bille (S2)

$\left\|\overrightarrow{CA}\right\| = a \quad , \quad \left\|\overrightarrow{OC}\right\| = R \quad , \quad \vec{\Omega}_{S1/S0} = \omega.\vec{z}_1 \quad , \quad \overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$

Les angles d'Euler traduisant les mobilités en rotation de la bille seront notés $(\Psi,\vec{z}_1),(\theta,\vec{u}),(\varphi,\vec{z}_2)$. Ils permettent de passer progressivement de la base $(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ à la base $(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ liée à (S2).

$$(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1) \xrightarrow{(\Psi,\vec{z}_1)} (\vec{u},\vec{v},\vec{z}_1) \xrightarrow{(\theta,\vec{u})} (\vec{u},\vec{t},\vec{n}) \xrightarrow{(\varphi,\vec{z}_2)} (\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$$

1 Mouvement quelconque (Pas de cinématique de contact imposé sur la bille)

1.1 Déterminer le vecteur vitesse du point C de (S2) , par rapport à $R_0$ : $\vec{V}(C \in S2/S0)$

1.2 Déterminer le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{S2/S0}$

1.3 Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}(A \in S2/S0)$ dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

1.4 Même question pour le point B: $\vec{V}(B \in S2/S0)$ exprimée dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1)$

2 Roulement sans glissement

2.1. Ecrire les conditions de roulement sans glissement aux points A et B

2.2 Déterminer l'axe central du mouvement de la bille (S2) par rapport au Bâti (S0)

2.3 Déterminer $\vec{\Omega}_{S2/S0}$ exprimé dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

2.4 Retrouver une des conditions de roulement sans glissement de la question 2-1 à partir des questions 2-2 et 2-3

2.5 A partir des autres conditions de la question 2-1 démontrer que $\vec{\Omega}_{S2/S0} = -\frac{R}{a}.\dot{\alpha}.(\vec{x}_1 + \vec{z}_1)$

2.6 Déterminer la vitesse de glissement $\vec{V}(D \in S1/S2)$ . Ecrire les conditions de roulement sans glissement. En déduire l'expression de $\dot{\alpha}$ en fonction de $\omega$

---

Solution

1.1 Pour obtenir $\vec{V}(C \in S2/S0)$ , dérivons le vecteur position :

$$\vec{V}(C \in S2/S0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right)_{R_0} = \left.\frac{d(R.\vec{x}_1)}{dt}\right)_{R_0} = R.\left.\frac{d\ \vec{x}_1}{dt}\right)_{R_0}$$

avec $\left.\frac{d\ \vec{x}_1}{dt}\right)_{R_0} = \left.\frac{d\ \vec{x}_1}{dt}\right)_{R_1} + \vec{x}_1 \wedge \vec{\Omega}_{R_0/R_1}$

nous obtenons : $\boxed{\vec{V}(C \in S2/S0) = R.\dot{\alpha}.\vec{y}_1}$

**1.2** D'après les angles d'Euler donnés nous déterminons directement :

$$\vec{\Omega}_{S2/S0} = \vec{\Omega}_{S2/S1} + \vec{\Omega}_{S1/S0} = (\dot{\Psi} + \dot{\alpha}).\vec{z}_1 + \dot{\theta}.\vec{u} + \dot{\varphi}.\vec{z}_2$$

$$\boxed{\vec{\Omega}_{S2/S0} = (\dot{\Psi} + \dot{\alpha})\,\vec{z}_1 + \dot{\theta}.\vec{u} + \dot{\varphi}.\vec{z}_2}$$

**1.3** Pour déterminer $\vec{V}(A \in S2/S0)$ utilisons la relation entre les vitesses de deux points d'un même solide:

$$\vec{V}(A \in S2/S0) = \vec{V}(C \in S2/S0) + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{\Omega}_{S2/S0}$$

$$\vec{V}(A \in S2/S0) = R.\,\dot{\alpha}.\vec{y}_1 - a.\,\vec{x}_1 \wedge \left((\dot{\Psi} + \dot{\alpha}).\,\vec{z}_1 + \dot{\theta}.\,\vec{u} + \dot{\varphi}.\vec{z}_2\right)$$

$$\boxed{\vec{V}(A \in S2/S0) = \left(R.\,\dot{\alpha} + a.\left(\dot{\Psi} + \dot{\alpha} + \dot{\varphi}.\cos\theta\right)\right).\vec{y}_1 - a.\left(\dot{\theta}.\sin\Psi - \dot{\varphi}.\sin\theta.\cos\Psi\right).\ \vec{z}_1}$$

**1.4** De la même façon que précédemment :

$$\vec{V}(B \in S2/S0) = \vec{V}(C \in S2/S0) + \overrightarrow{BC} \wedge \vec{\Omega}_{S2/S0}$$

$$\vec{V}(B \in S2/S0) = R.\dot{\alpha}.\vec{y}_1 + a.\vec{z}_1 \wedge \left((\dot{\Psi} + \dot{\alpha}).\vec{z}_1 + \dot{\theta}.\vec{u} + \dot{\varphi}.\vec{z}_2\right)$$

$$\boxed{\vec{V}(B \in S2/S0) = \left(R.\dot{\alpha}.\sin\Psi + a.\dot{\varphi}.\sin\theta\right)\vec{u} + \left(a.\dot{\theta} + R.\dot{\alpha}.\cos\Psi\right).\vec{v}}$$

**2.1** Les conditions de roulements sans glissement se traduisent par: $\vec{V}(A \in S2/S0) = \vec{0}$ et $\vec{V}(B \in S2/S0) = \vec{0}$ . A partir des relations vectorielles des questions précédentes exprimées dans les bases orthonormées on obtient les relations suivantes:

$$R.\dot{\alpha} + a.\left(\dot{\Psi} + \dot{\alpha} + \dot{\varphi}.\cos\theta\right) = 0 \qquad 1)$$

$$-a.\left(\dot{\theta}.\sin\Psi - \dot{\varphi}.\sin\theta.\cos\Psi\right) = 0 \qquad 2)$$

$$R.\dot{\alpha}.\sin\Psi + a.\dot{\varphi}.\sin\theta = 0 \qquad 3)$$

$$a.\dot{\theta} + R.\dot{\alpha}.\cos\Psi = 0 \qquad 4)$$

**2.2** Etudions le mouvement de $S2/S0$ :

Soit $I \in \Delta$ (axe central) du mouvement de $S2/S0$. Dans ce cas $\vec{V}(I \in S2/S0) = \lambda.\vec{\Omega}_{S2/S0}$. En utilisant la relation liant les vitesses de deux points d'un même solide nous avons :

Pour tout point M de ( $S_2$ ) :

$$\vec{V}(M \in S2/S0) = \vec{V}(I \in S2/S0) + \overrightarrow{MI} \wedge \vec{\Omega}_{S2/S0}$$

En combinant cette relation avec $\vec{\Omega}_{S2/S0}$ on obtient :

$$\vec{V}(M \in S2/S0).\vec{\Omega}_{S2/S0} = \vec{V}(I \in S2/S0).\vec{\Omega}_{S2/S0}$$

On a donc :

$$\left\|\vec{V}(M \in S2/S0)\right\|.\left\|\vec{\Omega}_{S2/S0}\right\|.\cos(\overline{\vec{V}(M \in S2/S0),\vec{\Omega}_{S2/S0}}) = \left\|\vec{V}(I \in S2/S0)\right\|.\left\|\vec{\Omega}_{S2/S0}\right\|$$

On déduit que $\left\|\vec{V}(M \in S2/S0)\right\|.\cos(\overline{\vec{V}(M \in S2/S0),\vec{\Omega}_{S2/S0}}) = \left\|\vec{V}(I \in S2/S0)\right\|$ pour tout point M de ( $S_2$ ) . Comme le cos de l'angle considéré est inférieur ou égal à 1, la norme $\left\|\vec{V}(I \in S2/S0)\right\|$ est donc minimale pour $I \in \Delta$ (axe central).

Comme A et B sont des points à vitesse nulle (non glissement entre (S2) et (S0)), l'axe central passe par ces deux points car ce sont deux points à vitesse minimale .

**2.3** Dans les conditions de roulement sans glissement on a :

$$\vec{\Omega}_{S2/S0} = (\dot{\Psi} + \dot{\alpha})\vec{z}_1 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z}_2$$

avec $\left|\begin{array}{l} \vec{u} = \cos\Psi.\vec{x}_1 + \sin\Psi.\vec{y}_1 \\ \vec{z}_2 = \cos\theta.\vec{z}_1 - \sin\theta(\cos\Psi.\vec{y}_1 + \sin\Psi.\vec{x}_1) \end{array}\right.$

On obtient alors l'expression de $\vec{\Omega}_{S2/S0}$ dans le repère $R_1\left(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1\right)$ :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{S2/S0} = \left|\begin{array}{c} \dot{\theta}.\cos\Psi + \dot{\varphi}.\sin\theta.\sin\Psi \\ \dot{\theta}.\sin\Psi - \dot{\varphi}.\sin\theta.\cos\Psi \\ \dot{\alpha} + \dot{\Psi} + \dot{\varphi}.\cos\theta \end{array}\right._{R_1}}$$

**2.4** Pour retrouver la condition de roulement sans glissement , utilisons les résultats des questions précédentes.

L'axe central de S2/S0 est orienté par $\frac{\vec{\Omega}_{S2/S0}}{\left\|\vec{\Omega}_{S2/S0}\right\|}$ et aussi par $\frac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$ car nous avons démontré (question 2-2) que l'axe central passait par les points A et B . Or $\frac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = \frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = \frac{-a.\vec{x}_1 - a.\vec{z}_1}{a\sqrt{2}} = -\frac{\vec{x}_1+\vec{z}_1}{\sqrt{2}}$ . Le vecteur unitaire orientant l'axe central n'a donc pas de composante suivant $\vec{y}_1$ . En observant les composantes de $\vec{\Omega}_{S2/S0}$ dans $R_1$ déduites à la question 2-3 , on déduit que $\dot{\theta}.\sin\Psi - \dot{\varphi}.\sin\theta.\cos\Psi = 0$ (pas de composante suivant $\vec{y}_1$ ). Cette relation correspond à la relation 2) déduite à la question 2-1

2.5 Pour démontrer que $\vec{\Omega}_{S2/S0} = -\frac{R}{a}.\dot{\alpha}.(\vec{x}_1+\vec{z}_1)$ , décomposons $\vec{\Omega}_{S2/S0}$ dans $R_1$ à partir de sa relation générale $\vec{\Omega}_{S2/S0} = (\dot{\Psi}+\dot{\alpha}).\vec{z}_1 + \dot{\theta}.\vec{u} + \dot{\varphi}.\vec{z}_2$ et des relations 1), 2) , 3) et 4) de la question 2-1.

$$\vec{\Omega}_{S2/S0} = (\dot{\Psi}+\dot{\alpha}+\dot{\varphi}.\cos\theta).\vec{z}_1 + \left(\dot{\theta}.\cos\Psi + \dot{\varphi}.\sin\theta.\sin\Psi\right).\vec{x}_1$$

1) $\rightarrow \quad \dot{\Psi}+\dot{\alpha} = -\left(\frac{R.\dot{\alpha}}{a} + \dot{\varphi}.\cos\theta\right)$

3) $\rightarrow \quad \dot{\varphi}.\sin\theta = -\frac{R.\dot{\alpha}.\sin\Psi}{a}$

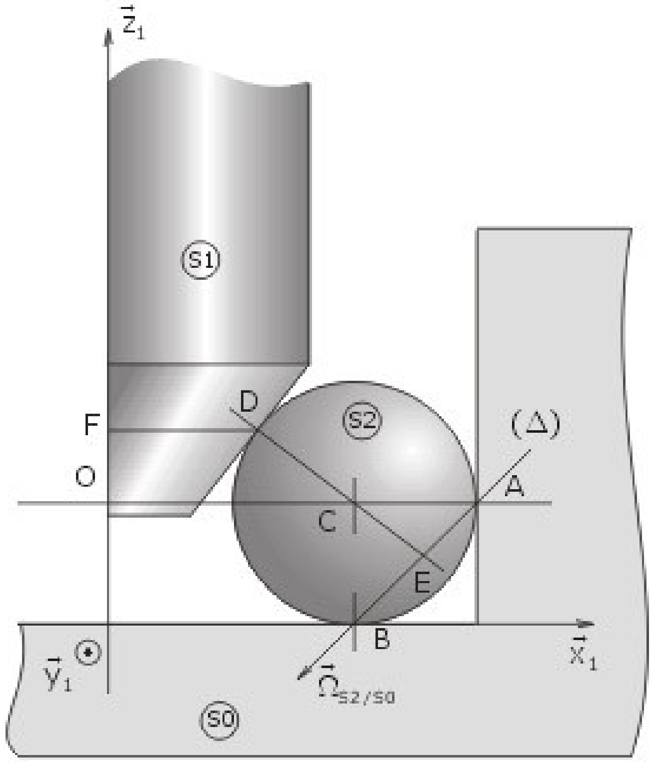
4) $\rightarrow \quad \dot{\theta} = -\frac{R.\dot{\alpha}.\cos\Psi}{a}$

En remplaçant ces nouvelles expressions dans $\vec{\Omega}_{S2/S0}$ on trouve :

$$\vec{\Omega}_{S2/S0} = -\left(\frac{R.\dot{\alpha}.\cos^2\Psi}{a} + \frac{R.\dot{\alpha}.\sin^2\Psi}{a}\right).\vec{x}_1 - \frac{R.\dot{\alpha}}{a}.\vec{z}_1 = -\frac{R.\dot{\alpha}}{a}.(\vec{x}_1+\vec{z}_1)$$

$$\boxed{\vec{\Omega}_{S2/S0} = -\frac{R.\dot{\alpha}}{a}.(\vec{x}_1+\vec{z}_1)}$$

2.6 Pour déterminer la vitesse $\vec{V}(D \in S2/S1)$ considéront la figure suivante




On a :

$$* \vec{V}(D \in S2/S1) = \underbrace{\vec{V}(D \in S2/S0)}_{\underbrace{\vec{V}(E \in S2/S0)}_{\vec{0}(\in \Delta)} + \overrightarrow{DE} \wedge \vec{\Omega}_{S2/S0}} - \underbrace{\vec{V}(D \in S1/S0)}_{\underbrace{\vec{V}(F \in S1/S0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{DF} \wedge \vec{\Omega}_{S1/S0}}$$

$$* \overrightarrow{DE} \wedge \vec{\Omega}_{S2/S0} = \left\|\overrightarrow{DE}\right\| . \left\|\vec{\Omega}_{S2/S0}\right\| . \vec{y}_1 = a . \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) . \left(\frac{\sqrt{2}.R}{a} . \dot{\alpha}\right) . \vec{y}_1 = R\left(1+\sqrt{2}\right) . \dot{\alpha} . \vec{y}_1$$

$$* \overrightarrow{DF} \wedge \vec{\Omega}_{S1/S0} = \left\|\overrightarrow{DF}\right\| . \left\|\vec{\Omega}_{S1/S0}\right\| . \vec{y}_1 = \left(R - a . \frac{\sqrt{2}}{2}\right) . \omega . \vec{y}_1$$

On obtient finalement: $\vec{V}(D \in S2/S1) = \left(R\left(1+\sqrt{2}\right) . \dot{\alpha} + \left(R - a . \frac{\sqrt{2}}{2}\right) . \omega\right) . \vec{y}_1$

Dans le cas d'un roulement sans glissement au point $D$ : $\vec{V}(D \in S2/S1) = \vec{0}$ . On en déduit d'après l'étude précédente: $R\left(1+\sqrt{2}\right) . \dot{\alpha} = \left(a . \frac{\sqrt{2}}{2} - R\right) . \omega$ et donc $\boxed{\dot{\alpha} = \frac{a . \frac{\sqrt{2}}{2} - R}{R\left(1+\sqrt{2}\right)} . \omega}$