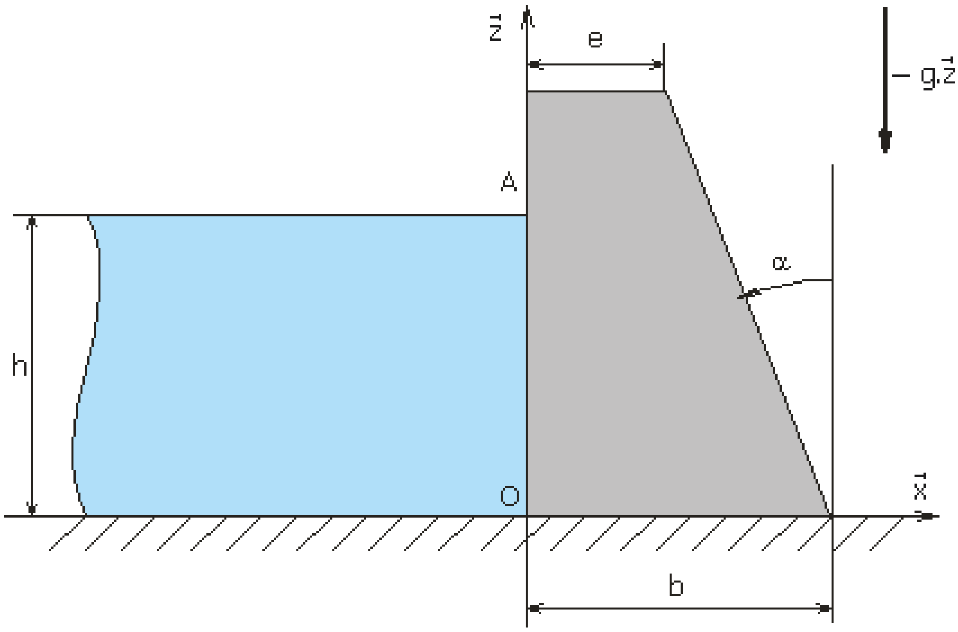
Enoncé

Considérons une portion de barrage dont la coupe transversale est représentée ci-dessous. Ce barrage est soumis à l'action de l'eau (pression hydrostatique) , à l'action de la pesanteur et à l'action de la pression atmosphérique.



1 On s'intéresse à un élément de barrage de longueur unitaire (suivant la direction $\vec{y}$), soumis à l'action de l'eau. On demande de déterminer la résultante des forces de pression et de déterminer la position du centre de poussée : P où les actions de l'eau sont réductibles à un glisseur . On prendra ρ comme masse volumique de l'eau.

2 Déterminer le torseur d'action des actions de gravitation sur le barrage en O , ainsi que la position du centre de gravité de celui-ci défini par $\overrightarrow{OG}.\vec{x} = x_G$. On prendra μ comme masse volumique du béton.

Solution

1 Les actions surfaciques réparties de contact entre l'eau et la paroi du barrage sont fonction de la fonction scalaire pression. Dans le cas de l'hydrostatique, la variation de cette pression est fonction du paramètre z . On a :

$\frac{dP(z)}{dz} = -\rho.g$. En intégrant cette relation entre deux positions repérées par les points A et M tels qu'en A : $z = h$ et en M : z , on a :

$\underbrace{P(A)}_{P_{atm}} - P(M) = -\rho.g.(h-z)$ et donc $P(M) = \rho.g.(h-z) + P_{atm}$

En un point M du barrage nous pouvons écrire :

$$_M\left\{dT_{Eau \to Unité / Barrage}\right\} = {}_M\left\{\begin{matrix} -P(z).1dz.(-\vec{x}) \\ \vec{0} \end{matrix}\right\} = {}_M\left\{\begin{matrix} -\left(\rho.g.(h-z)+P_{atm}\right).1.dz.(-\vec{x}) \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$

Soit $(O,\vec{x},\vec{y})$ le plan de symétrie de cet élément de barrage.

$$_O\left\{dT_{Eau \to Unité / Barrage}\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix} \left(\rho.g.(h-z)+P_{atm}\right).1.dz.\vec{x} \\ \underbrace{\overrightarrow{OM}}_{z.\vec{z}} \wedge \left(\rho.g.(h-z)+P_{atm}\right).1.dz.\vec{x} \end{matrix}\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix} \left(\rho.g.(h-z)+P_{atm}\right).dz.\vec{x} \\ z.\left(\rho.g.(h-z)+P_{atm}\right).dz.\vec{y} \end{matrix}\right\}$$

$$_O\left\{T_{Eau \to Unité / Barrage}\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix} \int_0^h \left(\rho.g.(h-z)+P_{atm}\right).dz.\vec{x} \\ \int_0^h z.\left(\rho.g.(h-z)+P_{atm}\right).dz.\vec{y} \end{matrix}\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix} \left[\left(-\rho.g.\frac{(h-z)^2}{2}+P_{atm}.z\right).\vec{x}\right]_0^h \\ \left[\left(\rho.g.\left(h.\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}\right)+P_{atm}.\frac{z^2}{2}\right).\vec{y}\right]_0^h \end{matrix}\right\}$$

On trouve donc :

$$_O\left\{T_{Eau \to Unité / Barrage}\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix} \left(P_{atm}.h+\rho.g.\frac{(h)^2}{2}\right).\vec{x} \\ \left(\rho.g.\left(\frac{h^3}{6}\right)+P_{atm}.\frac{h^2}{2}\right).\vec{y} \end{matrix}\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix} \vec{R}_{E \to U / B} \\ \vec{M}_{O\ E \to U / B} \end{matrix}\right\}$$

la position de l'axe central $(P,\vec{x})$ de ce torseur sera donné par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R}_{E \to U / B} \wedge \vec{M}_{O\ E \to U / B}}{\left\|\vec{R}_{E \to U / B}\right\|^2} = \frac{\left(P_{atm}.h+\rho.g.\frac{(h)^2}{2}\right).\vec{x} \wedge \left(\rho.g.\left(\frac{h^3}{6}\right)+P_{atm}.\frac{h^2}{2}\right).\vec{y}}{\left(P_{atm}.h+\rho.g.\frac{(h)^2}{2}\right)^2}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \frac{\rho.g.\left(\frac{h^2}{6}\right) + P_{atm}.\frac{h}{2}}{P_{atm} + \rho.g.\frac{h}{2}}.\vec{z}}$$

En ce point P le torseur résultant s'écrit :

$$_P\left\{T_{Eau \to Unité/Barrage}\right\} = {}_P\left\{\begin{matrix}\left(P_{atm}.h + \rho.g.\frac{(h)^2}{2}\right)\vec{x} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\} = {}_P\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{E \to U/B} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$$

2 Considérons un élément de volume de barrage soumis au champ de pesanteur. En un point M courant du barrage, si l'on considère un élément de volume $dv = 1.dx.dz$, on peut caractériser en ce point les actions de gravitation par :

$$_M\left\{dT_{Gravitation \to Unité/Barrage}\right\} = {}_M\left\{\begin{matrix}-\mu.g.dv.\vec{z} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\} = {}_M\left\{\begin{matrix}-\mu.g.1.dx.dz.\vec{z} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$$

$$_O\left\{dT_{Gravitation \to Unité/Barrage}\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix}-\mu.g.dx.dz.\vec{z} \\ \overrightarrow{OM} \wedge -\mu.g.dx.dz.\vec{z}\end{matrix}\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix}-\mu.g.dx.dz.\vec{z} \\ \left(x.\vec{x} + z.\vec{z}\right) \wedge -\mu.g.dx.dz.\vec{z}\end{matrix}\right\}$$

$$_O\left\{dT_{Gravitation \to Unité/Barrage}\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix}-\mu.g.dx.dz.\vec{z} \\ -\mu.g.\left(-x.\vec{y}\right).dx.dz\end{matrix}\right\}$$

$$_O\left\{T_{Gravitation \to Unité/Barrage}\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix}-\mu.g\left(\int_0^e\int_0^a dz.dx + \int_e^b \int_0^{-(x-b).\cot g\alpha} dz.dx\right).\vec{z} \\ -\mu.g\left(\int_0^e\int_0^a -x.dz.dx + \int_e^b \int_0^{-(x-b).\cot g\alpha} -x.dz.dx\right).\vec{y}\end{matrix}\right\}$$

$$_O\left\{T_{Gravitation \to Unité/Barrage}\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix}-\mu.g\left(a.e + \left[-\frac{(x-b)^2}{2}.\cot g\alpha\right]_e^b\right).\vec{z} \\ -\mu.g\left(-a.\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^e + \cot g\alpha.\left[\frac{x^3}{3} - b.\frac{x^2}{2}\right]_e^b\right).\vec{y}\end{matrix}\right\}$$

$$\boxed{_O\left\{T_{Gravitation \to Unité/Barrage}\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix}-\mu.g\left(a.e + \frac{(e-b)^2}{2}.\cot g\alpha\right).\vec{z} \\ \mu.g\left(a.\frac{e^2}{2} + \cot g\alpha\left(\frac{b^3}{6} + e^2.\left(\frac{e}{3} - \frac{b}{2}\right)\right)\right).\vec{y}\end{matrix}\right\}}$$

La position du centre de gravité G est tel qu'en G nous avons :

$$_G\left\{T_{Gravitation \to Unité / Barrage}\right\} = \left\{\begin{matrix} -\mu.g\left(a.e+\dfrac{(e-b)^2}{2}.\cot g\alpha\right).\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G$$

En notant $_O\left\{T_{Gravitation \to Unité / Barrage}\right\} = \left\{\begin{matrix} \vec{R}_{G \to U/B} \\ \vec{M}_{0\ G \to U/B} \end{matrix}\right\}_O$, la position de l'axe central de ce torseur est tel que G est positionné par rapport à O par la relation :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{R}_{G \to U/B} \wedge \vec{M}_{O\ G \to U/B}}{\left\|\vec{R}_{G \to U/B}\right\|^2} = \frac{-\mu.g\left(a.e+\dfrac{(e-b)^2}{2}.\cot g\alpha\right).\vec{z} \wedge \mu.g.\left(a.\dfrac{e^2}{2}+\cot g\alpha.\left(\dfrac{b^3}{6}+e^2.\left(\dfrac{e}{3}-\dfrac{b}{2}\right)\right)\right).\vec{y}}{\left(\mu.g\left(a.e+\dfrac{(e-b)^2}{2}.\cot g\alpha\right)\right)^2}$$

La position du centre de gravité suivant l'axe $(O,\vec{x})$ sera défini par :

$$\boxed{\overrightarrow{OG}.\vec{x} = x_G = \frac{a.\dfrac{e^2}{2}+\cot g\alpha\left(\dfrac{b^3}{6}+e^2.\left(\dfrac{e}{3}-\dfrac{b}{2}\right)\right)}{a.e+\dfrac{(e-b)^2}{2}.\cot g\alpha}}$$