

Chapitre ②: Vecteurs et translation

Partie ①: Les vecteurs

I. Le vecteur:

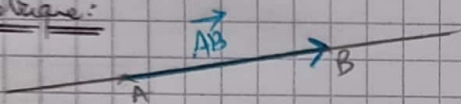
1) Caractéristiques d'un vecteur non nul:

* Définition

A et B deux points différents du plan
Le couple (A, B) détermine le vecteur \vec{AB}
de caractéristiques:

- La direction: c'est la droite (AB)
- Le sens: le sens de la demi droite $[AB]$
càd de A vers B
- La norme (module): la distance AB
- Le point A est l'origine du vecteur \vec{AB}
- Le point B est l'extrémité du vecteur \vec{AB}

* Figure géométrique:



2) Vecteur nul:

* Définition:

Chaque point A détermine un
vecteur nul \vec{AA} noté $\vec{0}$ et on écrit: $\vec{AA} = \vec{0}$
- si $\vec{AB} = \vec{0}$ alors A=B (càd
les points A et B sont confondus)

* Remarques:

La norme d'un vecteur nul est
zéro, mais la direction et le sens ne sont
pas définis.

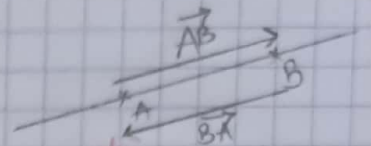
3) L'opposé des vecteurs:

* Définition:

A et B deux points, on a
 $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$
Le vecteur \vec{BA} s'appelle l'opposé du
vecteur \vec{AB} et on écrit $\vec{AB} = -\vec{BA}$

* Figure géométrique:

On a: $\vec{AB} = -\vec{BA}$



II. Égalité de deux vecteurs:

1) Définition:

* Dire que deux vecteurs sont égaux
signifie qu'ils ont même direction, même
sens et même norme.

* $\vec{AB} = \vec{CD}$ signifie que:

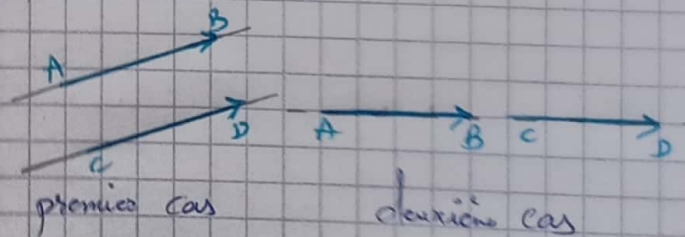
- \vec{AB} et \vec{CD} ont même direction
càd $(AB) \parallel (CD)$
- \vec{AB} et \vec{CD} ont même sens
- \vec{AB} et \vec{CD} ont même norme càd
 $AB = CD$

* Remarques:

même direction signifie que leurs
directions sont: soit deux droites
strictement parallèles, soit deux droites
confondues.

* Figure géométrique:

On a $\vec{AB} = \vec{CD}$



2) Propriétés importantes:

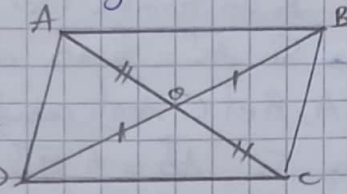
- 1) $\vec{AB} = \vec{DC}$ est équivalent à
les segments [AC] et [BD] ont même milieu
- 2) $\vec{AB} = \vec{DC}$ équivalent à ABCD est un
parallélogramme.

* Figure géométrique:

ABCD est un parallélogramme

On a: 1) $\vec{AB} = \vec{DC}$

2) les segments [AC] et [BD] ont même milieu



* Remarque:

ABCD parallélogramme signifie que

$$\begin{cases} \vec{AB} = \vec{DC} \\ \vec{BA} = \vec{CD} \\ \vec{AD} = \vec{BC} \\ \vec{DA} = \vec{CB} \end{cases}$$

3) Exercice d'application:

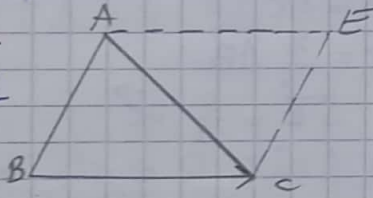
Soit ABC un triangle

1) Construire le point E tel que $\vec{AE} = \vec{BC}$

2) Montrer que: $\vec{AB} = \vec{EC}$

Solution:

1) $\vec{AE} = \vec{BC}$



2) On a $\vec{AE} = \vec{BC}$

Ponc AECB est un parallélogramme

Aloes $\vec{AB} = \vec{EC}$

III - Somme de deux vecteurs:

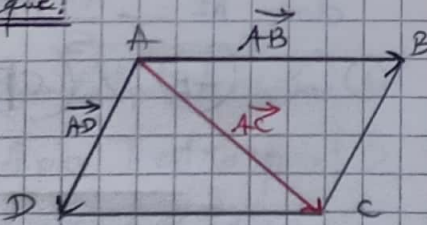
1) Définition:

On dit que le vecteur \vec{AC} est la somme des vecteurs \vec{AB} et \vec{AD} si ABCD est un parallélogramme

et on écrit: $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$

* Figure géométrique:

ABCD est un parallélogramme donc



$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$

Recapitulatif d'un parallélogramme

ABCD est un parallélogramme, donc:

$$\begin{cases} \vec{AB} = \vec{DC} \\ \vec{BA} = \vec{CD} \\ \vec{AD} = \vec{BC} \\ \vec{DA} = \vec{CB} \end{cases} \quad \text{②} \quad \begin{cases} \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC} \\ \vec{BA} + \vec{BC} = \vec{BD} \\ \vec{CB} + \vec{CD} = \vec{CA} \\ \vec{DA} + \vec{DC} = \vec{DB} \end{cases}$$

③ [AC] et [BD] ont même milieu

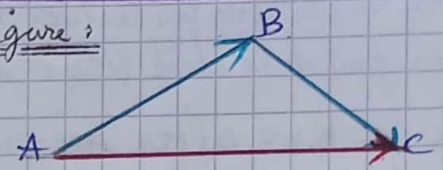
2) Relation de Chasles:

a - Propriété:

Si A, B et C sont trois points du plan alors: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$
Cette égalité s'appelle Relation de Chasles

b - Figure:

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$



c - Exemples:

Simplifions les écritures suivantes:

* $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{AC} + \vec{CA} = \vec{AA} = \vec{0}$

* $\vec{AC} - \vec{BC} + \vec{BE} = \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{BE} = \vec{AB} + \vec{BE} = \vec{AE}$

* $\vec{AB} + \vec{ED} + \vec{BE} + \vec{DC} = \vec{AB} + \vec{BE} + \vec{ED} + \vec{DC} = \vec{AE} + \vec{EC} = \vec{AC}$

3) Exercice d'application:

Soit ABC un triangle

1) a) Construire le point E tel que $\vec{AC} = \vec{AE} + \vec{AB}$

b) Construire les points M et N les symétriques

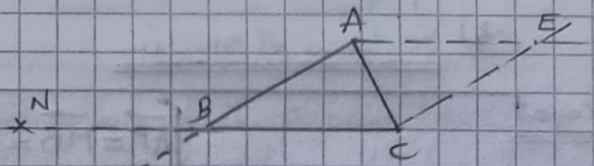
respectifs de A et C par rapport à B

2) Montrer que $\vec{NC} = \vec{NA} + \vec{NM}$

Solution:

1) a) On a $\vec{AC} = \vec{AE} + \vec{AB}$ donc AECB est un parallélogramme.

b) On a M et N les symétriques respectifs de A et C par rapport à B donc B est milieu des segments [AM] et [CN]



2) On a M et N les symétriques respectifs de A et C par rapport à B

Donc B est milieu des diagonales [AM] et [CN] d'où ACMN est parallélogramme.

Aloes: $\vec{NC} = \vec{NA} + \vec{NM}$

IV - Produit d'un vecteur par un nombre réel :

1) Définition :

Soient \vec{AB} un vecteur non nul et k nombre réel. On appelle le vecteur \vec{AM} le produit du vecteur \vec{AB} par le réel k . Si M est un point de la droite (AB) et on écrit : $\vec{AM} = k\vec{AB}$

- * Si $k > 0$ alors $AM = k \times AB$ et \vec{AM} et \vec{AB} ont même sens
- * Si $k < 0$ alors $AM = -k \times AB$ et \vec{AM} et \vec{AB} ont des sens opposés
- * Si $k = 0$ alors : $A = M$ sont confondus.

Remarque :

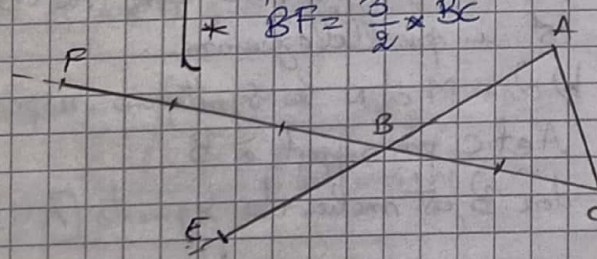
$$0 \times \vec{AB} = \vec{0} \text{ et } k \times \vec{0} = \vec{0}$$

2) Exemple :

ABC un triangle. Construisons les points E et F tels que :

$$\vec{AE} = 2\vec{AB} \text{ et } \vec{BF} = -\frac{3}{2}\vec{BC}$$

- $\vec{AE} = 2\vec{AB}$ donc
- * $E \in (AB)$
 - * \vec{AE} et \vec{AB} ont même sens
 - * $AE = 2 \times AB$
- $\vec{BF} = -\frac{3}{2}\vec{BC}$ donc
- * $F \in (BC)$
 - * \vec{BF} et \vec{BC} ont des sens opposés
 - * $BF = \frac{3}{2} \times BC$

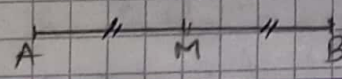


3) Vecteurs et milieu

* Propriété :

M milieu de $[AB]$ signifie que

$$\begin{cases} \vec{AM} = \vec{MB} = \frac{1}{2}\vec{AB} \\ \vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0} \\ \vec{MA} = -\vec{MB} \end{cases}$$



* Remarque : On utilise souvent $\vec{AM} = \vec{MB}$

4) Propriétés importantes

- k un nombre réel non nul
 - * Si $\vec{AC} = k\vec{AB}$ alors les points A, B et C sont alignés
 - * Si $\vec{AB} = k\vec{MN}$ alors $(AB) \parallel (MN)$
- On dit que les deux vecteurs \vec{AB} et \vec{MN} sont colinéaires.

5) Exercices d'application :

Exercice ① : $ABCD$ un parallélogramme et E un point tel que $\vec{DE} = \frac{2}{3}\vec{AB}$. Montrer que les points D, C et E sont alignés.

* Solution : On a $ABCD$ un parallélogramme donc $\vec{AB} = \vec{DC}$
 or $\vec{DE} = \frac{2}{3}\vec{AB}$
 donc $\vec{DE} = \frac{2}{3}\vec{DC}$
 D'où les points D, E et C sont alignés.

Exercice ② : Soient ABC un triangle et E et F deux points tels que : $\vec{AE} = -\frac{1}{5}\vec{BC}$ et C est le milieu du segment $[BF]$. Montrer que : $(AE) \parallel (CF)$

* Solution : On a C est le milieu de (BF)
 donc $\vec{BC} = \vec{CF}$
 or $\vec{AE} = -\frac{1}{5}\vec{BC}$
 donc $\vec{AE} = -\frac{1}{5}\vec{CF}$
 D'où $(AE) \parallel (CF)$

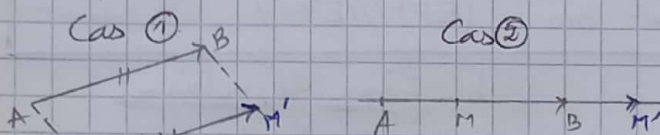
* Partie II : La translation

V - La translation :

1) Activité :

A et B et M trois points du plan

Construire dans chacun des cas le point M' tel que $\vec{MM'} = \vec{AB}$



ABM'M est parallélogramme

Dans chacun des cas, on dit que le point M' est l'image du point M par la translation T du vecteur \vec{AB} (qui transforme A en B)

2) Définition :

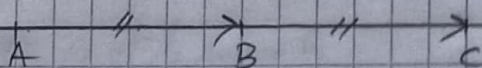
\vec{AB} un vecteur non nul et M un point
On dit que le point M' est l'image du point M par la translation du vecteur \vec{AB} (qui transforme A en B) si $\vec{MM'} = \vec{AB}$
càd ABM'M est un parallélogramme.

3) Propriété caractéristique :

Si M' et N' sont les images respectives de M et N par une translation T, alors
 $\vec{M'N'} = \vec{MN}$

* Remarques :

Soit $T_{\vec{AB}}$ la translation de vecteur \vec{AB}
alors, l'image de A par T est le point B
et l'image de B par T est le point C
tel que B est le milieu du segment [AC]



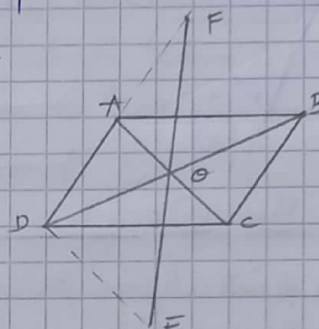
1) Exercice d'application :

ABCD un parallélogramme de centre O

- 1) Construire le point E image de D par la translation de vecteur \vec{AC}
- 2) Construire F symétrique de D par rapport à A
- 3) Montrer que O est milieu de [EF]

Solution :

1)



2) On a E est l'image de D par la translation de vecteur \vec{AC}

$$\text{donc } \vec{DE} = \vec{AC}$$

alors ACED est parallélogramme

$$\text{Donc } \vec{AD} = \vec{CE} \quad (1)$$

or F est le symétrique de D par rapport à A
donc A est milieu de [DF]

$$\text{donc } \vec{FA} = \vec{AD} \quad (2)$$

De (1) et (2), on trouve que $\vec{FA} = \vec{CE}$

ce qui signifie que FA-EC est parallélogramme de diagonales [EF] et [AC]

(comme O milieu de [AC])

Alors O est le milieu de [EF]

VI - L'image de quelques figures par une translation :

1) L'image d'une droite :

a - propo 1 :

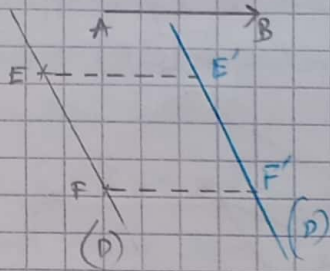
L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle.

* Remarque importante :

Pour construire l'image d'une droite par une translation, on construit les images de deux points de cette droite par la translation

b- figure géométrique:

\vec{AB} un vecteur non nul et (D) droite
 Construisons (D') image de (D) par la
 translation de vecteur \vec{AB}



On a: $(D) \parallel (D')$

c- Propo ②:

Des images des points alignés par une translation
 sont aussi alignés. On dit que la
 translation conserve l'alignement des points.

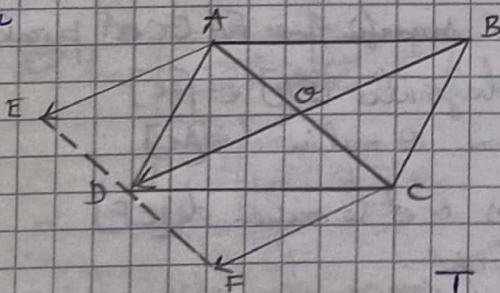
d- Exercice d'application:

ABCD parallélogramme de centre O

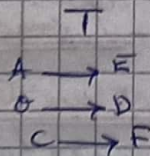
- 1) Construire E image de A par la translation de vecteur \vec{OD}
- 2) Construire F image de C par la même translation
- 3) Montrer que les points E, F et D alignés

Solution:

1, 2) figure



On a les points E, D et F sont les
 images respectives des points
 A, O et C par la translation T



et on a A, O et C sont alignés
 et on sait que la translation conserve
 l'alignement des points

Alors les points E, F et D sont alignés.

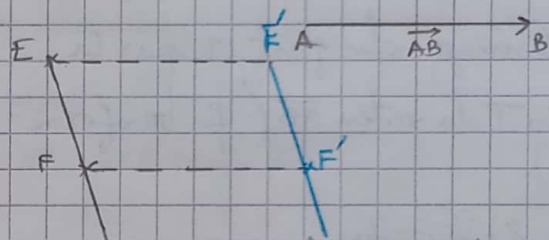
2) Image d'une demi-droite:

a- propo ③:

L'image d'une demi-droite (EF) par
 une translation est la demi-droite $(E'F')$
 tel que E' et F' sont les images respectives
 de E et F par la même translation
 et on a: $(EF) \parallel (E'F')$

b- figure géométrique:

\vec{AB} vecteur et (EF) demi-droite
 Construisons $(E'F')$ l'image de (EF) par
 la translation de vecteur \vec{AB}



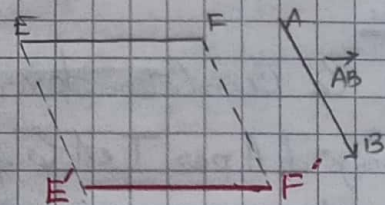
3) Image d'un segment:

a- propo ④:

L'image d'un segment par une translation
 est un segment de même longueur.
 On dit que la translation conserve la
 distance.

b- figure géométrique:

\vec{AB} vecteur non nul et $[EF]$ un segment
 Construisons $[E'F']$ l'image de $[EF]$ par
 la translation de vecteur \vec{AB}



On a $(EF) \parallel (E'F')$ et $EF = E'F'$

4) Image d'un angle:

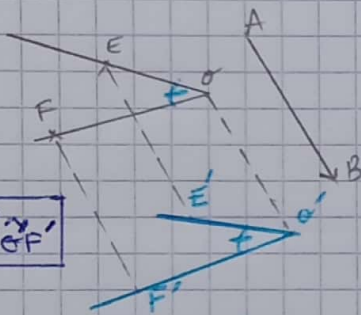
a - Propriété (5):

L'image d'un angle par une translation est un angle de même mesure.

On dit que la translation conserve la mesure des angles.

b - Figure géométrique:

\vec{AB} vecteur non nul et $\hat{E}OF$ un angle. Construisons l'angle $\hat{E}'O'F'$ l'image de l'angle $\hat{E}OF$ par la translation de vecteur \vec{AB} .



Donc: $\hat{E}OF = \hat{E}'O'F'$

5) Image d'un cercle:

a - Propriété (6):

L'image du cercle (C) de centre O et de rayon R par une translation est le cercle (C') de centre O' l'image de O par la même translation et de même rayon R .

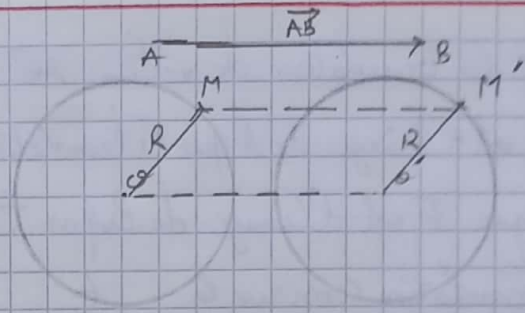
* Remarque importante:

Pour construire l'image d'un cercle par une translation, on construit l'image du centre par la même translation et on garde le même rayon.

b - Figure géométrique:

\vec{AB} un vecteur non nul et (C) un cercle de centre O et de rayon R .

Construisons le cercle (C') image du cercle (C) par la translation du vecteur \vec{AB} .



6) Exercice d'application:

Soit ABC un triangle tel que: $AB = 4\text{ cm}$ et $\hat{BAC} = 70^\circ$. On considère la translation t de vecteur \vec{AC} . Soient E et F les images respectives des points C et B par la translation t .

- 1) Tracez la figure
- 2) Montrez que $(BC) \parallel (EF)$
- 3) Calculez CF
- 4) Calculez \hat{FCE}

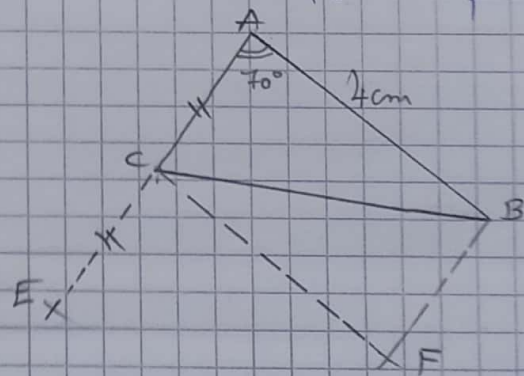
Solution:

1) La figure

On a E et F les images respectives des points C et B par la translation t .

Donc $\vec{AC} = \vec{CE}$

ca'd C est le milieu du segment $[AE]$ et $\vec{AC} = \vec{BF}$ ca'd $ACFB$ est parallélogramme

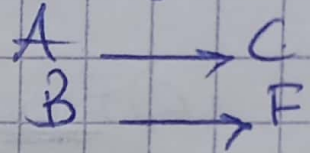


2) On a E et F sont les images respectives des points C et B par la translation t . Donc la droite (EF) est l'image de la droite (BC) par la translation t . D'où $(BC) \parallel (EF)$.

3) t est la translation de vecteur \vec{AE}
 donc C est l'image de A par la translation t
 et puisque F est l'image de B par t
 or la translation conserve la

distance

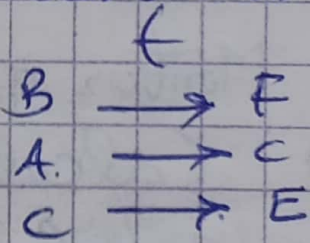
donc $CF = AB$



et comme $AB = 4 \text{ cm}$ alors $CF = 4 \text{ cm}$

4) On a F, C et E sont les images respectives
 des points B, A et C par la translation t

Donc l'angle \widehat{FCE} est l'image
 de l'angle \widehat{BAC} par t



et comme la translation conserve la mesure
 des angles, donc: $\widehat{FCE} = \widehat{BAC}$

Comme $\widehat{BAC} = 70^\circ$ donc $\widehat{FCE} = 70^\circ$