VECTEURS ET TRANSLATION

9

Objectifs d'apprentissage

- Reconnaître un vecteur et le construire.
- Construire la somme de deux vecteurs.
- Utiliser les vecteurs pour résoudre un problème.
- Construire l'image d'une figure par une translation.
- Utiliser la translation dans la résolution des problèmes géométriques.

Prérequis

- Reconnaître les caractéristiques d'un vecteur.
- L'égalité de deux vecteurs et le parallélogramme
- Utiliser la relation de Chasles.
- Reconnaître la translation qui transforme un point en un autre point.

Gestion du temps

- 10 heures

Outils didactiques

- Tableau.
- Livre scolaire.
- Compas, Equerre, Rapporteur.

- **Pr :** Abdelilah BOUTAYEB
- **Niveau :** 3ème APIC
- **Matière :** Mathématiques
- **Etablissement :** Collège Nahda

Activités

Activité 1: ***Activité : 1 – page : 146***

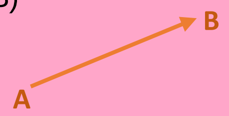
Contenu de la leçon

I- Les vecteurs :

1) Vocabulaire :

*** Définition :** Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par trois composantes

- La direction : la direction de la droite (AB)
- Le sens : de A vers B
- La longueur : la distance AB.

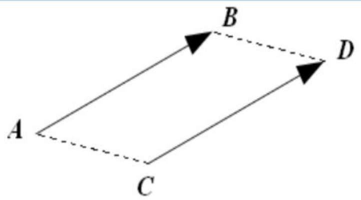


*** Remarque :** Tout point A définit un ***vecteur nul*** noté $\vec{0}$, on écrit : $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

2) Egalité de deux vecteurs :

*** Propriété :**

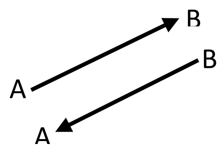
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \text{ signifie que : } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ ont la même direction : } (AB)//(CD) \\ \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ ont le même sens} \\ \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ ont la même longueur : } AB = CD \end{cases}$$



*** Remarque :** Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ tel que les points ne sont pas alignés, alors le quadrilatère ***ABDC*** est ***un parallélogramme***.

3) Vecteur opposé :

*** Définition :** Le vecteur opposé d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, et on écrit : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.



*** Remarque :** Deux vecteurs opposés ont la *même direction* et *même longueur* mais ils ont des *sens opposés*.

Evaluation

Exercice 1: Soit ABC un triangle.

1) Construis M tel que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$
2) Construis N tel que : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CB}$

Exercice 2 : Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$.

J le symétrique de A par rapport à I.

1) Construire une figure convenable.
2) Montrer que : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BJ}$

Exercice 3 : $ABCD$ un parallélogramme et E le symétrique de A par rapport à B.

Montrer que $BECD$ est un parallélogramme.

Exercice 4 : $ABCD$ un parallélogramme.

1) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$
2) Construis le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$

Exercice 5 : $ABCD$ un parallélogramme.

1) Construis M tel que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
2) Construis N tel que : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

Activités	Contenu de la leçon	Evaluation

Activités

Activité 2 : **Activité : 2 – page : 146**

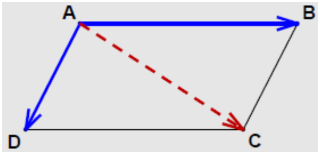
Activité 3 : **Activité : 3 – page : 146**

Contenu de la leçon

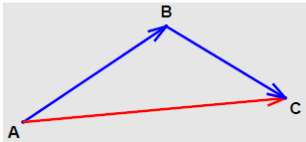
4) Somme de deux vecteurs :

*** Définition :** La somme de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AD}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$ tel que $ABCD$ soit *un parallélogramme*.

On écrit : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$



*** Propriété :** Pour tous les points A, B *et* C on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ est appelée ***relation de Chasles***.



*** Exemples :** Simplifier ce qui suit :

* $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{MO}$

** $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{EE} = \vec{0}$

*** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

5) Produit d'un vecteur par un nombre réel :

*** Définition :** Soit k un nombre réel et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le nombre réel k si $C \in (AB)$ tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

- Si $k > 0$ alors $AC = k \times AB$ et $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ ont le ***même sens***.
- Si $k <$ alors $AC = k \times AB$ et $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ ont de ***sens contraires***.

*** Exemples :** 1) Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul. Construis le point M tel que : $\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{AB}$

Evaluation

Exercice 6 : Simplifier les écritures des vecteurs suivants en utilisant la relation de Chasles :

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ ▪ $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{OM}$ ▪ $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}$ ▪ $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}$ ▪

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}$ ▪ $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{FE} - \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GF}$

$\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{EA} - \overrightarrow{BC}$

$2\left(\overrightarrow{MN} - 5\overrightarrow{EF}\right) - 5\left(\overrightarrow{MN} - 2\overrightarrow{EF}\right)$

Exercice 7 : Soit EFG un triangle.

Construis les points M, N *et* K tel que :

$\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{EF}$ ▪ $\overrightarrow{GN} = -2\overrightarrow{GF}$ ▪ $\overrightarrow{EK} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{EG}$

Exercice 8 : Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.

1) Construis O' tel que : $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}$

2) Construis E *et* F tel que : $\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

3) Montrer que : $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

4) Déduire que $(AC)//(EF)$

Activités

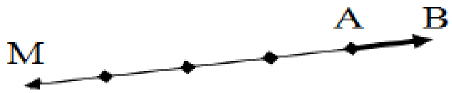
Activité 4 : Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur et $M \notin (AB)$.

1) Construis le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

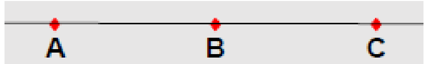
2) Quelle est la nature du quadrilatère $ABM'M$?

Contenu de la leçon

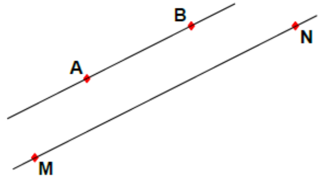
2) Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul. Construis le point M tel que : $\overrightarrow{AM} = -4\overrightarrow{AB}$



*** Propriété :** Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors A, B et C sont des ***points alignés***.

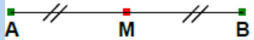


*** Propriété :** Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{MN}$ alors $(AB)//(MN)$, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont ***colinéaires***.



6) Vecteur et milieu d'un segment :

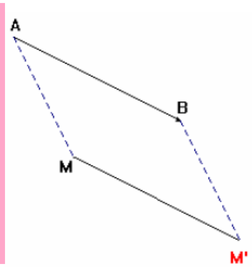
*** Propriété :** A, M et B sont des points. M est le milieu de $[AB]$ signifie que :
$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB} \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \end{cases}$$



II- La translation :

1) Image d'un point par une translation :

*** Définition :** A et B deux points distincts.
M' est l'image de M par la translation qui transforme A en B signifie que :
$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB} \\ ABM'M \text{ est un parallélogramme} \end{cases}$$



Evaluation

Exercice 9 : Soit ABC un triangle tel que : $BC = 6cm$.

1) Construis M et N tel que : $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{AB}$.

2) Montrer que : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

3) Déduire que : A, M et N sont des points alignés.

Exercice 10 : Soit ABC un triangle tel que : $AC = 1cm$ et $AB = 6cm$.

1) Construis E et F tel que : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$.

2) Montrer que : $(CE)//(FB)$.

Exercice 11 : Soit $ABCD$ un parallélogramme

1) Construis E et F tel que: $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

2) Montrer que C, A et F sont des points alignés.

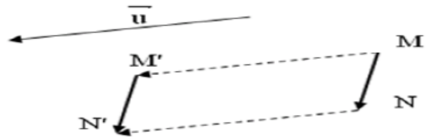
Activités	Contenu de la leçon	Evaluation

Contenu de la leçon

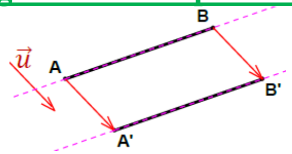
*** Remarque :** Si $\boldsymbol{M} \in (\boldsymbol{AB})$ alors M' l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ ***appartient*** à la droite (AB).

*** Propriété :** Soient M et N deux points du plan.
Si M' et N' sont les images respectives des points M et N par une translation, alors : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

*** Exemple :** On considère la translation de vecteur $\vec{u}$

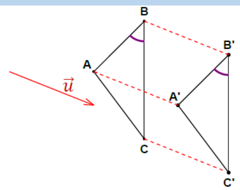


2) Image des figures usuelles par une translation :



*** Propriété :** L'image d'une droite (AB) par une translation est une droite $(A'B')$ parallèle à (AB).

*** Propriété :** L'image d'un segment $[AB]$ par une translation est un segment $[A'B']$ de même longueur.



*** Propriété :** L'image d'un angle $\widehat{ABC}$ par une translation est un angle $\widehat{A'B'C'}$ de même mesure.

Evaluation

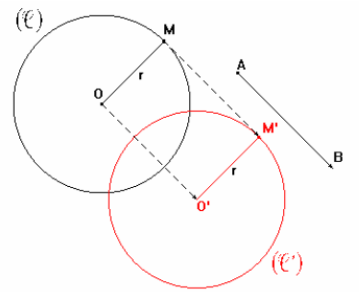
Exercice 12 : Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1) Déterminer l'image du point D par la translation qui transforme A en B.
2) Déterminer l'image du point A par la translation qui transforme A en B.
3) Déterminer l'image du point C par la translation qui transforme D en A.
4) Construis le point E l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
5) Montrer que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$

Exercice 13 : Soit $ABCD$ un losange de centre I et K l'image du point I par la translation $\boldsymbol{T}$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1) Construis une figure convenable.
2) Montrer que l'image du point D par la translation $\boldsymbol{T}$ est le point C.
3) Déterminer l'image de l'angle $\widehat{AID}$ par la translation $\boldsymbol{T}$.
4) Déduire que BKC est un triangle rectangle en K.

Activités	Contenu de la leçon	Evaluation



*** Propriété :** L'image d'un cercle (ℓ) par une translation est un cercle (ℓ') de même rayon.

Exercice 14 : Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.

1) Construis E l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OD}$.

2) Construis F l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{OD}$.

3) Montrer que F, D et E sont des points alignés.

Exercice 15 : Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AC = 4cm$ et E le milieu de $[BC]$.

Soit $\boldsymbol{T}$ la translation qui transforme A en E.

1) Construis F l'image de B et G l'image de C par la translation $\boldsymbol{T}$.

2) Calculer EG. Justifie.

3) Montrer que : $(FG)//(BC)$.

4) Déterminer la nature du triangle EFG.