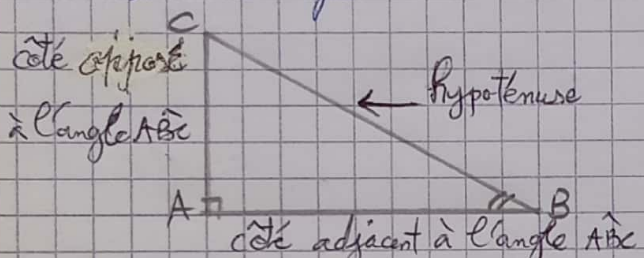
Chapitre ⑦ : Calcul trigonométrique

I - Les rapports trigonométriques d'un angle aigu :

1) Vocabulaire :

ABC est un triangle rectangle en A
On considère l'angle $\widehat{ABC}$



*** Remarques :**

→ De même pour l'angle $\widehat{ACB}$, le côté adjacent est AC et le côté opposé est AB

→ les deux angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont aigus c.à.d $0° < \widehat{ABC} < 90°$ et $0° < \widehat{ACB} < 90°$

→ L'hypoténuse est le plus grand côté dans un triangle rectangle

2) Définition :

Dans un triangle rectangle ABC en A, les rapports trigonométriques de l'angle $\widehat{ABC}$ sont :

* Le rapport $\frac{AB}{BC}$ s'appelle le cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$ symbolisé par : $\cos\widehat{ABC}$

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{\text{côté adjacent de l'angle } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

* Le rapport $\frac{AC}{BC}$ s'appelle le sinus de l'angle $\widehat{ABC}$ symbolisé par $\sin\widehat{ABC}$

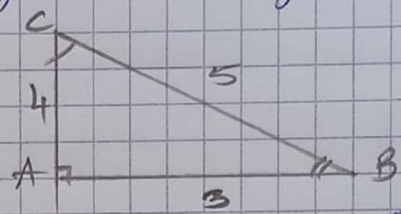
$$\sin\widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé de l'angle } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

* Le rapport $\frac{AC}{AB}$ s'appelle la tangente de l'angle $\widehat{ABC}$ symbolisé par $\tan\widehat{ABC}$.

$$\tan\widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé de l'angle } \widehat{ABC}}{\text{côté adjacent de l'angle } \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB}$$

*** Exemple :**

ABC un triangle rectangle en A telque : AB = 3 cm et AC = 4 cm et BC = 5 cm
Calculer les rapports trigonométriques de l'angle $\widehat{ABC}$ et l'angle $\widehat{ACB}$



* $\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6$

* $\sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} = 0,8$

* $\tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3}$

* $\cos\widehat{ACB} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} = 0,8$

* $\sin\widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6$

* $\tan\widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} = 0,75$

*** Exercice d'application :**

ABC est un triangle telque :
$AB = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$, $BC = 4$

1) Montrer que ABC est un triangle rectangle
2) Calculer les rapports trigonométriques de $\widehat{ABC}$
3) Calculer les rapports trigonométriques de $\widehat{ACB}$

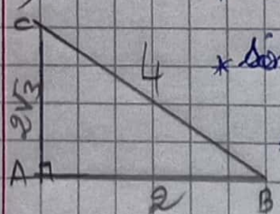
Solution :

1) On a $\begin{cases} AB^2 = 2^2 = 4 \\ AC^2 = (2\sqrt{3})^2 = 4\times3 = 12 \\ BC^2 = 4^2 = 16 \end{cases}$

On a $AB^2 + AC^2 = 4 + 12 = 16$
donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Donc d'après le théorème réciproque de Pythagore le triangle ABC est rectangle en A

2)



* $\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$

* $\sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

* $\tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

3) Les rapports trigonométriques de $A\hat{C}B$

* $\cos A\hat{C}B = \frac{AC}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

* $\sin A\hat{C}B = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

* $\tan A\hat{C}B = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3) L'emploi de la calculatrice dans le calcul trigonométrique :

1) En employant la calculatrice, calculons les valeurs approchés des rapports trigonométrique de ~~ABC~~ $\alpha = 30°$

On a $\cos 30° \simeq 0,86$, $\sin 30° = \frac{1}{2} = 0,5$

$\tan 30° \simeq 0,57$

2) En employant la calculatrice, trouvons les valeurs de l'angle α dont les rapports trigonométriques sont respectivement :

$\cos\alpha_1 = 0,5$, $\sin\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\alpha_3 = 1$

* En touchant les boutons $\boxed{\text{shift}}$ + $\boxed{\begin{matrix}\cos\\ \sin\\ \tan\end{matrix}}$

On trouve : $\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 45°$, $\alpha_3 = 45°$

II - Des relations entre les rapports trigonométriques d'un angle aigu :

1) Propo①: la relation entre le cosinus et le sinus d'un angle droit :

a - Propo① :

α mesure d'un angle aigu $0° < \alpha < 90°$

On a : $0 < \cos\alpha < 1$ et $0 < \sin\alpha < 1$

$$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$$

* Remarques :

→ $\cos^2 x + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases}\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha\\ \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha\end{cases}$

→ C'est à dire si on sait le cos (sin), On peut calculer le sin (cos)

→ On écrit $\cos^2 x = (\cos x)^2$ pas $\cos x^2$

b - Exemples :

α est mesure d'un angle aigu tel que $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

Calculons $\sin\alpha$

On sait que $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$

$\sin^2\alpha + \frac{4}{9} = 1$

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

donc $\sin\alpha = \sqrt{\frac{5}{9}}$ car $\sin\alpha > 0$

Alors $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

c - Exercice d'application :

$A = 2\cos^2 x + 3\sin^2 x - 1$
$= 2\cos^2 x + 2\sin^2 x + \sin^2 x - 1$
$= 2(\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x - 1$
$= 2 + \sin^2 x - 1$
$A = 1 + \sin^2 x$

$B = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$
$= \cos^2 x + \cancel{2\cos x\sin x} + \sin^2 x + \cos^2 x - \cancel{2\cos x\sin x}$
$+ \sin^2 x$
$= 1 + 1$
$B = 2$

$C = \sin^4 x - \sin^2 x + \cos^2 x - \cos^4 x$
$= \sin^2 x(\sin^2 x - 1) + \cos^2 x(1 - \cos^2 x)$
$= -\sin^2 x\cos^2 x + \sin^2 x\cos^2 x$
$C = 0$

$D = \cos^4 x + 2\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x$
$= (\cos^2 x)^2 + 2\cos^2 x\sin^2 x + (\sin^2 x)^2$
$= \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)^2}_{1^2}$
$=$
$D = 1$

2) Propo②: la relation entre cosinus et sinus et tangente d'un angle droit

a - Propo② :

α mesure d'un angle, $0° < \alpha < 90°$

On a : $\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

*** Remarques:**

1) $\begin{cases} \sin x = \tan x \cdot \cos x \\ \cos x = \dfrac{\sin x}{\tan x} \end{cases}$

2) α angle aigu on a $\tan \alpha > 0$

b_ Exemples:

1) x mesure d'angle droit telque $\tan x = 2\sqrt{2}$

On a $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ donc $2\sqrt{2} = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

càd $\sin x = 2\sqrt{2}\cos x$

or $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$(2\sqrt{2}\cos x)^2 + \cos^2 x = 1$

$8\cos^2 x + \cos^2 x = 1$

$9\cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{9}$

$\cos x = \sqrt{\dfrac{1}{9}}$ car $\cos x > 0$

Alors $\boxed{\cos x = \dfrac{1}{3}}$

or $\sin x = 2\sqrt{2}\cos x$

$= 2\sqrt{2} \times \dfrac{1}{3}$

Alors $\boxed{\sin x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

2) x mesure d'angle aigu telque $\sin x = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Calculons $\tan x$

Calculons d'abord $\cos x$

On a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x + \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1$

$\cos^2 x + \dfrac{5}{9} = 1$

$\cos^2 x = 1 - \dfrac{5}{9} = \dfrac{4}{9}$

$\cos x = \sqrt{\dfrac{4}{9}}$ car $\cos x > 0$

Alors, $\boxed{\cos x = \dfrac{2}{3}}$

on a $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \times \dfrac{3}{2}$

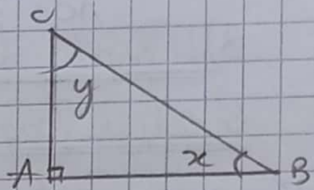
Alors, $\boxed{\tan x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}}$

3) Propo ③: les rapports trigonométriques de deux angles complementaires

a_ Propo ③:

Si x et y les mesures de deux angles complémentaires càd $x + y = 90°$ alors

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= \sin y \\ \sin x &= \cos y \\ \tan x &= \dfrac{1}{\tan y} \end{aligned}}$$



b_ Exemples:

* $\sin 70° = \cos 20°$

* $\cos 30° = \sin 60°$

* $\sin 80° = \cos 10°$

* $\cos 45° = \sin 45°$

* $\tan 15° = \dfrac{1}{\tan 75°}$

* $\tan 11° = \dfrac{1}{\tan 79°}$

c_ Exercice d'application:

Calculer

$A = \cos 5° + 2\sin^2 22° - \sin 85° + 2\sin^2 68°$

$B = \cos^2 14° + \cos^2 28° + \cos^2 76° + \cos^2 62°$

$C = 5\sin^2 34° + 3\cos^2 11° + 5\sin^2 56° + 3\cos^2 79°$

Solution

$A = \cos 5° + 2\sin^2 22° - \sin 85° + 2\sin^2 68°$

$= \cancel{\cos 5°} - \cancel{\cos 5°} + 2\sin^2 22° + 2\cos^2 22°$

$= 2(\sin^2 22° + \cos^2 22°)$

$= 2 \times 1$

$A = 1$

$B = \cos^2 14° + \cos^2 28° + \cos^2 76° + \cos^2 62°$

$= \cos^2 14° + \cos^2 28° + \sin^2 14° + \sin^2 28°$

$= \cos^2 14° + \sin^2 14° + \cos^2 28° + \sin^2 28°$

$= 1 + 1$

$B = 2$

$C = 5\sin^2 34° + 3\cos^2 11° + 5\sin^2 56° + 3\cos^2 79°$

$= 5\sin^2 34° + 3\cos^2 11° + 5\cos^2 34° + 3\sin^2 11°$

$= 5(\sin^2 34° + \cos^2 34°) + 3(\cos^2 11° + \sin^2 11°)$

$= 5 \times 1 + 3 \times 1$

$= 5 + 3$

$C = 8$

4) Angles particuliers :

x	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف

Exemples :

$$C=\sqrt{2}\cos 45°+\sin^2 30°+\sin^2 60°+\sqrt{3}\tan 30°$$

$$=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=\frac{2}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{3}$$

$$=1+\frac{4}{4}+1$$

$$=2+1$$

$C=3$

Relations supplémentaires :

$$\boxed{\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x} \quad \text{et} \quad \sin^2 x=\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}}$$

Démonstration :

$$* \quad \frac{1}{1+\tan^2 x}=\frac{1}{1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}=\frac{1}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$=\frac{1}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{\cos^2 x}{1}$$

$$=\cos^2 x$$

$$* \quad \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}{1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}=\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$=\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x}{1}$$

$$=\sin^2 x$$