TRIGONOMÉTRIE

6

Objectifs d'apprentissage

- Connaître et utiliser dans le triangle rectangle des relations entre le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu et les longueurs de 2 côtés du triangle.
- Utiliser la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées :
  - du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle aigu donné.
  -de l'angle aigu dont on connaît le sinus, le cosinus ou la tangente.
- Savoir et utiliser la relation : $cos^2x + sin^2x = 1.$
- Utiliser les relations entre sin ; cos et tan de deux angles complémentaires.

Prérequis

- Utiliser le théorème de Pythagore.
- Calculer le cosinus d'un angle aigu.
- Utiliser la calculatrice pour donner une valeur approchée du cosinus d'un angle et l'angle d'un cosinus.

Gestion du temps

- 7 heures

Outils didactiques

- Tableau.
- Livre scolaire.
- Une équerre.
- Le compas.

- **Pr :** Abdelilah BOUTAYEB
- **Niveau :** 3ème APIC
- **Matière :** Mathématiques
- **Etablissement :** Collège Nahda

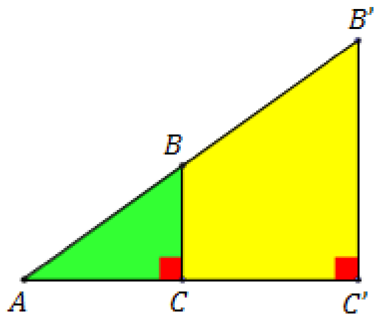
Activités

Activité 1: ABC est un triangle rectangle en

A tel que :AB=4cm et BC=5cm

Calculer :cos(ABC)

Activité 2 :



a. Justifiez que (BC) est parallèle à $(B'C')$

b. Démontrer que

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

c. En déduire que

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$$

Contenu de la leçon

I- Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu :

*** Définition :** Dans un triangle rectangle :

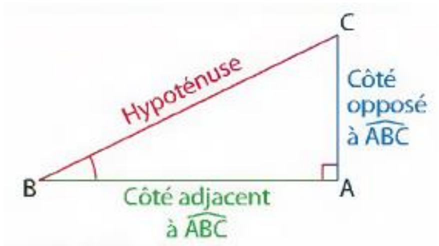
- Le ***cosinus*** d'un angle aigu est égal au quotient du *côté adjacent* sur *l'hypoténuse*.
- Le ***sinus*** d'un angle aigu est égal au quotient du *côté opposé* sur *l'hypoténuse*.
- La ***tangente*** d'un angle aigu est égale au quotient du *côté opposé* sur le *côté adjacent*.

*** Exemple :** Dans un triangle ABC rectangle en A :

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{\text{côté adjacent}}{l'\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin\widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé}}{l'\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan\widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AC}{AB}$$



*** Remarques :** * Le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont toujours compris entre 0 et 1 et n'ont pas d'unité.

* La tangente d'un angle aigu est un nombre strictement positif et n'a pas d'unité.

II- Formules trigonométriques :

*** Propriété 1 :** Pour tout angle aigu $\hat{a}$ on a :

$$\cos^2\hat{a} + \sin^2\hat{a} = 1 \quad \blacksquare \quad \tan\hat{a} = \frac{\sin\hat{a}}{\cos\hat{a}}$$

Evaluation

Exercice 1: ABC un triangle rectangle en A tel que : AB=3cm ; AC=4cm et BC=5cm.

1) Calculer : $\cos\hat{B}$; $\sin\hat{B}$ et $\tan\hat{B}$

2) Calculer : $\cos\hat{C}$; $\sin\hat{C}$ et $\tan\hat{C}$

Exercice 2 : ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 6$ et $\cos\hat{B} = \frac{1}{2}$.

1) Calculer BC, puis déduis AC.

2) Calculer : $\sin\hat{B}$ ■ $\tan\hat{B}$

Exercice 3 : ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AC = \sqrt{3}$ et $\tan\hat{C} = \sqrt{2}$.

1) Calculer AB, puis déduis BC.

2) Calculer : $\sin\hat{C}$ ■ $\tan\hat{C}$

Exercice 4 : ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 8cm$ et $AC = 6cm$.

Soit I le milieu de [AB] et E sa projeté orthogonal sur (BC).

1) Calculer BC, puis déduis $\cos\hat{B}$.

2) Calculer EB.

3) Calculer EC puis IE.

Exercice 5 : Sachant que : $\cos x = \frac{3}{5}$.

Calculer : $\sin x$ et $\tan x$.

Activités

Activité 3 : ABC est un triangle rectangle en A .On pose $\widehat{ABC} = \hat{x}$

1- Démontrer que :
$0 \prec \sin x \prec 1 et 0 \prec \cos x \prec 1$

2-Calculer : $\sin^2 x + \cos^2 x$

3- Démontrer que : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Activité 4 : ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB=4cm et BC=5cm et AC=3cm

1-Calculer :
$\cos(A\hat{B}C) et \sin(A\hat{B}C) et \tan(A\hat{B}C)$

$\cos(A\hat{C}B) et \sin(A\hat{C}B) et \tan(A\hat{C}B)$

2-Que peut-on déduire ?

Contenu de la leçon

*** Remarques :** * La première formule permet de calculer $\sin\hat{a}$ connaissant $\cos\hat{a}$ (ou de calculer $\cos\hat{a}$ connaissant $\sin\hat{a}$).

* La deuxième formule permet de calculer $\cos\hat{a}\,;\sin\hat{a}\ ou\ \tan\hat{a}$ connaissant deux de ces nombres.

*** Exemple :** Soit $\hat{x}$ un angle aigu tel que : $\cos\hat{x} = 0{,}8$.

Calculer : $\sin\hat{x}\ et\ \tan\hat{x}$.

➔ * Calculons $\sin\hat{x}$:

On sait que : $cos^2\hat{x} + sin^2\hat{x} = 1$

Alors : $sin^2\hat{x} = 1 - cos^2\hat{x} = 1 - 0{,}8^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$

Donc : $\sin\hat{x} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$

* Calculons $\tan\hat{x}$:

On sait que : $\tan\hat{x} = \frac{\sin\hat{x}}{\cos\hat{x}} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$

*** Propriété 2 :** Si $\hat{a}\ et\ \hat{b}$ sont les mesures de deux angles complémentaires, alors :

$$\boldsymbol{\cos\hat{a} = \sin\hat{b}} \quad ■ \quad \boldsymbol{\sin\hat{a} = \cos\hat{b}} \quad ■ \quad \boldsymbol{\tan\hat{a} = \frac{1}{\tan\hat{b}}}$$

*** Exemple :** Soit $\hat{a} = 30°\ et\ \hat{b} = 60°$ deux angles complémentaires.

Alors : * $\cos 30° = \sin 60°$

** $\sin 30° = \cos 60°$

*** $\tan 30° = \frac{1}{\tan 60°}$

Evaluation

Exercice 6 : Sachant que : $\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Calculer : $\cos x\ et\ \tan x$.

Exercice 7 : Calculer :

$A = cos^2 20° + sin^2 20° + 1$

$B = cos^2 35° + sin^2 70° + sin^2 35° + cos^2 70°$

$C = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$

$D = 2cos^2 x + 3sin^2 x - 2$

$E = \frac{sin^4 x - cos^4 x}{\sin x + \cos x}$

$F = \sqrt{1+\cos x} \times \sqrt{1-\cos x} \times \frac{1}{\sin x}$

Exercice 8 : $\hat{x}$ est la mesure d'un angle aigu. Déterminer la valeur de $\hat{x}$ dans chaque cas :

1) $\sin\hat{x} = \cos 45°$

2) $\cos\hat{x} = \sin 15°$

3) $\sin\hat{x} = \cos 75°$

Exercice 9 : Calculer :

$A = cos^2 10° + sin^2 40° + cos^2 80° + sin^2 50°$

$B = \cos 25° + \cos 70° - \sin 65° + \sin 20°$

$C = \sin 80° + 7sin^2 50° - \cos 10° + 7sin^2 40°$

$D = cos^2 15 + cos^2 75° - 2 \times tan35° \times tan55°$

$E = 2sin^2 25° + \sin 13° + 2cos^2 65° - \cos 77°$