Chapitre ⑤ : triangles isométriques et triangles semblables

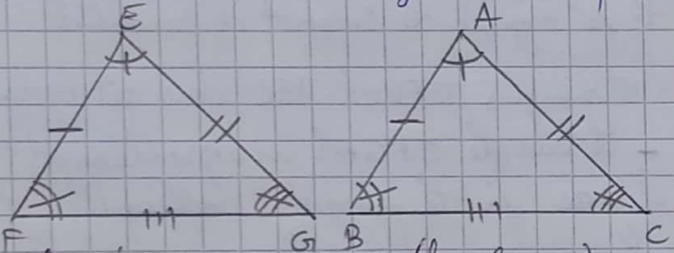
I – Triangles isométriques :

1) Définition :

Deux triangles isométriques sont des triangles superposables.

2) Exemple et vocabulaire :

Soient ABC et EFG deux triangles isométriques.



* Les côtés correspondants : (homologues)

→ [AB] et [EF] deux côtés correspondant
→ [AC] et [EG]
→ [BC] et [FG]

A	B	C
E	F	G

* Les angles correspondants : (homologues)

→ $\widehat{BAC}$ et $\widehat{FEG}$ deux angles correspondantes
→ $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EFG}$
→ $\widehat{ACB}$ et $\widehat{EGF}$.

3) Propriété ① :

Si deux triangles sont isométriques, alors :
→ Leurs côtés correspondants ont la même longueur.
→ Leurs angles correspondants ont la même mesure.

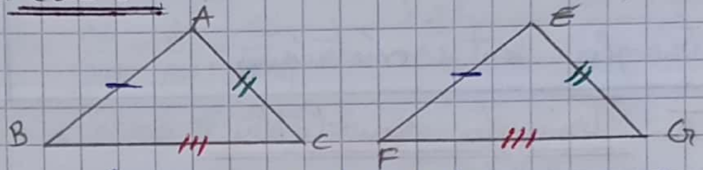
* Exemples

Dans l'exemple précédent, on a

$$\begin{cases} AB = EF \\ AC = EG \\ BC = FG \end{cases} \qquad \begin{cases} \widehat{ABC} = \widehat{EFG} \\ \widehat{ACB} = \widehat{EGF} \\ \widehat{BAC} = \widehat{FEG} \end{cases}$$

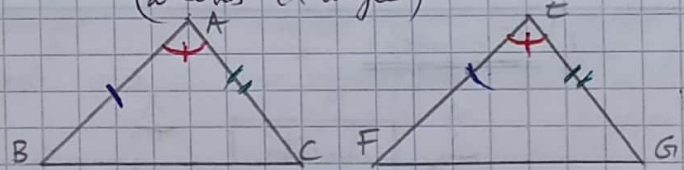
4) Cas d'isométrie :

* Cas ① : côté + côté + côté (3 côtés)



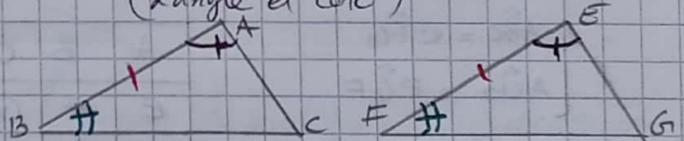
Si on a $\begin{cases} AB = EF \\ AC = EG \\ BC = FG \end{cases}$ alors les triangles ABC et EFG sont isométriques.

* Cas ② : côté + angle entre eux + côté (2 côtés et angle)



Si on a $\begin{cases} AB = EF \\ AC = EG \\ \widehat{BAC} = \widehat{FEG} \end{cases}$ alors les triangles ABC et EFG sont isométriques.

* Cas ③ : angle + côté adjacent + angle (2 angle et côté)



Si on a $\begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{FEG} \\ AB = EF \\ \widehat{ABC} = \widehat{EFG} \end{cases}$ alors les triangles ABC et EFG sont isométriques

* Cas ① :

Si deux triangles ont leurs côtés respectivement de même longueur, alors les deux triangles sont isométriques.

* Cas ② :

Si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés respectivement de même longueur, alors les deux triangles sont isométriques.

* Cas ③ :

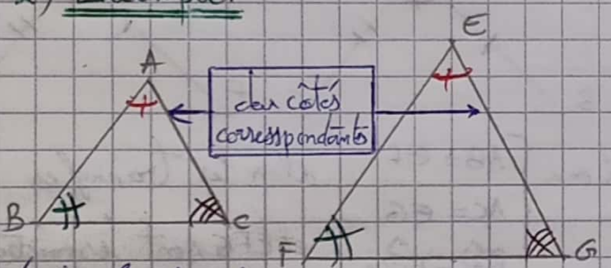
Si deux triangles ont un côté de même longueur adjacent à deux angles de même mesure, alors les deux triangles sont isométriques.

II – Triangles semblables.

1) Définition :

Deux angles semblables sont des triangles qui ont leurs angles deux à deux de même mesure.

2) Exemple :



Dans les triangles ABC et EFG

On a : $\begin{cases} B\hat{A}C = F\hat{E}G \\ A\hat{B}C = E\hat{F}G \\ A\hat{C}B = E\hat{G}F \end{cases}$

tableau des sommets correspondants

A	B	C
E	F	G

Donc les triangles ABC et EFG sont ~~isométriques~~ semblables.

* Remarques importantes :

→ Les côtés ~~isométriques~~ correspondants (homologues) sont : $\begin{cases} [AB] \text{ et } (EF) \\ [AC] \text{ et } [EG] \\ [BC] \text{ et } (FG) \end{cases}$ mais ne sont pas égaux

→ Deux triangles isométriques sont semblables mais la réciproque est fausse.

3) Propriété ① :

Si deux triangles sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés correspondants sont proportionnelles.

→ Autrement dit, si ABC et EFG sont deux triangles semblables (dans cet ordre), alors

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG} = k$$

k est appelé rapport de similitude.

* Remarques importantes :

→ Dans la figure précédente, on a :

$$\frac{EF}{AB} = \frac{EG}{AC} = \frac{FG}{BC} = k > 1$$

k s'appelle le rapport de similitude des triangles EFG et ABC dans cet ordre

– Le triangle EFG est un agrandissement de ABC dont le rapport (coefficient) d'agrandissement est $k > 1$

→ On a $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG} = \frac{1}{k} < 1$

$\frac{1}{k}$ est le rapport de similitude des triangles ABC et EFG

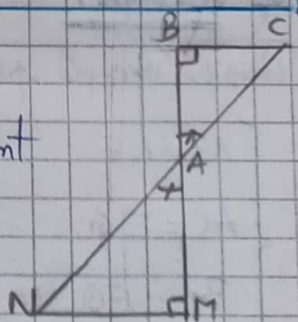
– Le triangle ABC est une réduction de EFG dont le rapport de réduction est $\frac{1}{k} < 1$

4) Cas de similitude :

a – Cas ① :

Si deux angles d'un triangle ont même mesure que deux angles d'un autre triangle, alors ces deux triangles sont semblables.

* Exemple :



Dans cette figure, on a :

* $B\hat{A}C = M\hat{A}N$ car elles sont opposées par le sommet

* $A\hat{B}C = A\hat{M}N = 90°$ car elles sont deux angles droits

Donc d'après le cas ① de similitude, les triangles ABC et AMN sont semblables.

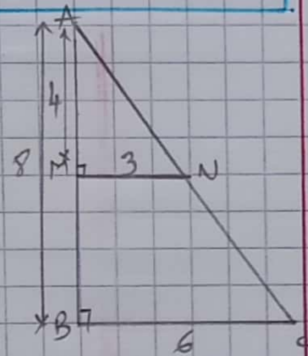
b- Cas ②:

Si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés dont les longueurs sont respectivement proportionnelles, alors ces deux triangles sont semblables.

Autrement dit: Soient ABC et EFG deux triangles

Si $\begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{FEG} \\ \dfrac{AB}{EF} = \dfrac{AC}{EG} \end{cases}$ alors les triangles ABC et EFG sont semblables.

*** Exemple:**



Dans cette figure, on a:

* $\widehat{ABC} = \widehat{AMN}$ car sont deux angles droits.

* On a $\begin{cases} \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

Donc d'après le cas ② de similitude, les deux triangles AMN et ABC sont semblables dont le rapport de similitude est $\frac{1}{2}$

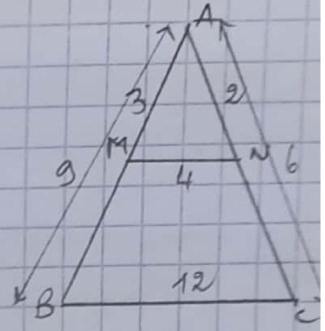
c- Cas ③:

Si deux triangles ont les longueurs de leurs côtés respectivement proportionnelles, alors ces deux triangles sont semblables.

Autrement dit: Soient ABC et EFG deux triangles

Si $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{AC}{EG} = \dfrac{BC}{FG}$, alors les triangles ABC et EFG sont semblables.

*** Exemple:**



On a

* $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{9}{3} = 3$

* $\dfrac{AC}{AN} = \dfrac{6}{2} = 3$

* $\dfrac{BC}{MN} = \dfrac{12}{4} = 3$

Donc $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$

Donc d'après le cas ③ de similitude, les deux triangles ABC et AMN sont semblables dont le rapport de similitude est 3.

Cas de similitude

Cas ①	Cas ②	Cas ③
angle + angle	deux rapport égaux + angle entre eux	3 rapport égaux

*** Remarques:**

* Deux figures sont semblables s'ils ont la même forme générale et si l'un est l'agrandissement ($k>1$) ou réduction ($k<1$) de l'autre.

* Le rapport de similitude compare entre deux mesures de même unité, il est utilisé par exemple, pour faire des cartes et des dessins géométriques avec des petites mesures des figures réels. Par exemple l'échelle 1 cm pour chaque 100 m signifie que chaque cm dans la carte présente 100 m dans la réalité.