SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS

12

Objectifs d'apprentissage

- Résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.
- Résoudre graphiquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.
- Résoudre des problèmes en fonction des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Prérequis

- ⊗ Résoudre des équations du premier degré à une inconnue.
- ⊗ Repère dans le plan.
- ⊗ Equation d'une droite.

Gestion du temps

10 heures

Outils didactiques

- ♣ Tableau.
- ♣ Livre scolaire.

- **Pr :** Abdelilah BOUTAYEB
- **Niveau :** $3^{\text{ème}}$ APIC
- **Matière :** Mathématiques
- **Etablissement :** Collège Nahda

Activités	Contenu de la leçon	Evaluation

Activité 1: ***Activité : 1 – page : 206***

I- Système de deux équations du premier degré à deux inconnues :

*** Définition :** Un *système de deux équations* du premier degré à *deux inconnues* x et y est de la forme :

$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, où a, b, c, a', b' et c' désignent des nombres donnés.

Un couple (x, y) est *solution d'un système* s'il vérifie simultanément les deux égalités.

*** Exemple 1 :** $\begin{cases} 4x+3y=0 \\ x-2y=3 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues.

*** Exemple 2 :** Le couple $(3,1)$ est-il solution du système $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x+y=4 \end{cases}$?

Pour $x=3$ et $y=1$: $\begin{cases} 2\times 3-1=6-1=5 \\ 3+1=4 \end{cases}$

Les deux égalités sont simultanément vérifiées pour : $x=3$ et $y=1$.

Donc le couple $(3,1)$ est solution du système $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x+y=4 \end{cases}$

II- Résolution du système :

*** Définition :** Résoudre un système de deux équations à deux inconnues revient à déterminer tous les couples de nombres (x, y) qui vérifient simultanément les deux équations.

1) Résoudre algébriquement un système :

a/ Résolution par substitution :

Cette méthode consiste à exprimer l'un des inconnues en fonction de l'autre dans l'une des équations et le substituer dans l'autre équation pour trouver une équation de premier degré d'une inconnue.

Exercice 1: Le couple $(5,1)$ est-il solution du système : $\begin{cases} x+2y=7 \\ -3x+8y=-7 \end{cases}$?

Exercice 2 : Déterminer les nombres réels a et b sachant que le couple $(3,-2)$ soit la solution du système : $\begin{cases} ax+2y=5 \\ 3x-by=1 \end{cases}$

Exercice 3 : Résous par la méthode de substitution les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x-7y=12 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x-y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-3y=2 \\ 2x-6y=4 \end{cases}$

Activités	Contenu de la leçon	Evaluation

Contenu de la leçon

*** Exemple :** Résous le système $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ par substitution.

➔ On a : $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ alors : $\begin{cases} y = 9 + 3x \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$

On remplace y par sa valeur dans l'équation (2) :

$\begin{cases} y = 9 + 3x \\ 4x - 3 \times (9 + 3x) = -17 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} y = 9 + 3x \\ 4x - 27 - 9x = -17 \end{cases}$

d'où : $\begin{cases} y = 9 + 3x \\ 4x - 9x = -17 + 27 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} y = 9 + 3x \\ -5x = 10 \end{cases}$ Alors : $\begin{cases} y = 9 + 3x \\ x = \frac{10}{-5} = -2 \end{cases}$

Enfin : $\begin{cases} y = 9 + 3 \times (-2) = 9 - 6 = 3 \\ x = -2 \end{cases}$

Donc le couple $(-2,3)$ est la solution de ce système.

b/ Résolution par combinaison linéaire :

Cette méthode consiste à multiplier les membres de chaque équation pour obtenir des coefficients opposés de l'une des inconnues, puis on ajoute membre à membre les deux équations du système pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

*** Exemple :** Résous le système $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ par combinaison linéaire.

➔ On cherche à éliminer l'inconnue $\boldsymbol{x}$ pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

* On multiplie les deux membres de la première équation par **2** et ceux de la deuxième par **(-5)**.

$\begin{cases} 2 \times (5x - 4y) = 2 \times 8 \\ -5 \times (2x + 5y) = -5 \times 1 \end{cases}$ on obtient : $\begin{cases} 10x - 8y = 16 \\ -10x - 25y = -5 \end{cases}$

* On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer $\boldsymbol{x}$**.**

Evaluation

Exercice 4 : Résous par la méthode de la combinaison linéaire les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -6x + 3y = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 12x + 14y = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 9x - 7y = 8 \\ -2x + 7y = 2 \end{cases}$

Activités	Contenu de la leçon	Evaluation

$10x + (-10x) - 8y + (-25y) = 16 + (-5)$

* On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de $\boldsymbol{y}$.

$10x - 10x - 8y - 25y = 16 - 5$

c'est-à-dire : $-33y = 11$ donc : $y = \frac{11}{-33}$ signifie que : $\boldsymbol{y = \frac{-1}{3}}$.

* On remplace $\boldsymbol{y}$ par $\frac{-1}{3}$ dans l'une des deux équations pour trouver $\boldsymbol{x}$.

Ici on choisit la 2ème équation et on trouve : $2x + 5 \times \left(\frac{-1}{3}\right) = 1$

c'est-à-dire : $2x - \frac{5}{3} = 1$

$2x = 1 + \frac{5}{3}$ ➔ $2x = \frac{3}{3} + \frac{5}{3}$ ➔ $2x = \frac{8}{3}$ ➔ $x = \frac{8}{3} \div 2$ ➔ $x = \frac{8}{3} \times \frac{1}{2}$ ➔ $x = \frac{8}{6}$

Donc : $\boldsymbol{x = \frac{4}{3}}$.

Alors le couple $(\frac{-1}{3}, \frac{4}{3})$ est la solution de ce système.

2) Résoudre graphiquement un système :

Cette méthode consiste à relier chaque équation à une droite, puis on représente chacune des droites dans un même repère orthonormé.

La solution, si elle existe, est donnée par les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

*** Exemple :** Résous graphiquement le système $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$

➔ Pour chaque équation on exprime y en fonction de x, et on obtient :

$\begin{cases} -y = -4x + 2 \\ -y = -2x - 2 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$

Dans un repère on trace les deux droites (D_1) d'équation : $y = 4x - 2$, et (D_2) d'équation : $y = 2x + 2$.

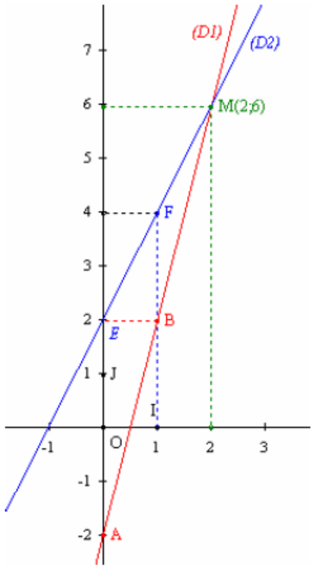
- Pour (D_1) : $\begin{cases} x_A = 0 \implies y_A = 4x_A - 2 = 4 \times 0 - 2 = 0 - 2 = -2 \\ x_B = 1 \implies y_B = 4x_B - 2 = 4 \times 1 - 2 = 4 - 2 = 2 \end{cases}$

Exercice 5 : Résous graphiquement les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} -x + y + 3 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ 6x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} -3x - 2y = -3 \\ 6x + 4y + 1 = 0 \end{cases}$

Activités	Contenu de la leçon	Evaluation
Activité 2 : ***Activité : 2 – page : 208***	- Pour (D_2) : $\begin{cases} x_E = 0 \implies y_E = 2x_E + 2 = \times 0 + 2 = 0 + 2 = 2 \\ x_F = 1 \implies y_F = 2x_F + 2 = 2 \times 1 + 2 = 2 + 2 = 4 \end{cases}$ Dans un repère orthonormé, on trace les deux droites (D_1) et (D_2). * Les deux droites (D_1) et (D_2) se coupent en un point : $M(2{,}6)$. Alors le couple $(2{,}6)$ est la solution de ce système.  *** Remarque :** - Si les deux droites *ont le même coefficient directeur*, alors *le système n'a pas de solution*. - Si les deux droites ont *le même coefficient directeur et le même ordonné à l'origine*, alors *le système a plusieurs solutions*. **III- Résolution d'un problème avec un système :** *** Règle :** Les étapes pour résoudre un problème : - Choisir les inconnues. - Mise en système d'équations. - Résoudre le système. - Vérification (vérifier que le couple trouvé est solution de problème). - Conclusion.	*Exercice 6 :* Pour classer des photos, un magasin propose deux types de rangement : des albums et des boîtes. Loubna achète 6 boîtes et 5 albums et paie 610 DH. Youssef achète 3 boîtes et 7 albums et paie 530 DH. Quel est le prix d'une boîte ? et quel est le prix d'un album ? *Exercice 7 :* 1) Résous le système suivant : $\begin{cases} 3x + 2y = 53 \\ 4x + y = 49 \end{cases}$ 2) Chez un marchand de fruits : * Fatima a payé 53 DH pour l'achat de 3Kg de bananes et 2Kg de pommes. * Bilal a payé 49 DH pour l'achat de 4Kg de bananes et 1Kg de pommes. Détermine le prix d'un kilogramme de bananes et d'un kilogramme de pommes.

Activités	Contenu de la leçon	Evaluation

Contenu de la leçon

*** Exemple :** Un musée propose un tarif pour les adultes à 70 DH et un tarif pour les enfants à 45 DH. Lors d'une journée, ce musée a reçu la visite de 205 personnes et la recette totale a été de 12225 DH.
Retrouve le nombre d'adultes et le nombre d'enfants ayant visité le musée lors de cette journée.

➔ * *Choix des inconnues* : Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants.

* *Mise en système d'équation* :

- 205 personnes ont visité le musée donc : $x+y=205$

- La recette a été de 12225 DH alors : $70x+45y=12225$

* *Résoudre le système :* On résout le système par la méthode de substitution.

$\begin{cases} x+y=205 \\ 70x+45y=12225 \end{cases}$, c'est-à-dire : $\begin{cases} x=205-y \\ 70x+45y=12225 \end{cases}$

Signifie : $\begin{cases} x=205-y \\ 70(205-y)+45y=12225 \end{cases}$, donc : $\begin{cases} x=205-y \\ 14350-70y+45y=12225 \end{cases}$

Signifie : $\begin{cases} x=205-y \\ -70y+45y=12225-14350 \end{cases}$, alors : $\begin{cases} x=205-y \\ -25y=-2125 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x=205-y \\ y=\frac{-2125}{-25}=85 \end{cases}$, alors : $\begin{cases} x=205-85=120 \\ y=85 \end{cases}$

* *Vérification :* On a : $\begin{cases} 120+85=205 \\ 70\times120+45\times85=8400+3825=12225 \end{cases}$

* *Conclusion :* Alors le nombre d'adultes est 120, et le nombre d'enfants est 85.

Evaluation

Exercice 8 : 1) Résous le système suivant :

$$\begin{cases} 2x+5y=16 \\ x+y=5 \end{cases}$$

2) Le prix d'entrée au zoo est de 20 DH pour les enfants et 50 DH pour les adultes.
Un groupe de 5 personnes a payé 160DH.
Détermine le nombre d'enfants et le nombre d'adultes dans ce groupe.