Chapitre ①: Les racines carrées

I_ La racine carré d'un nombre réel positif:

1) Activité ①:

1°/ En utilisant la calculatrice, remplir le tableau suivant:

x	0	1	144	0,64	$\frac{81}{49}$
$\sqrt{x}$	0	1	12	$\frac{4}{5}=0,8$	$\frac{9}{7}$

2°/ Rempli le vide par ce qui convient:

* $(3)^2=9$ * $(\sqrt{7})^2=7$ * $\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36}$
* $(\sqrt{5})^2=5$ * $\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$ * $\left(\frac{-1}{8}\right)^2=\frac{1}{64}$

2°) Définition:

Soit a un nombre réel positif ou nul (c'est à dire $a\geq 0$)
La racine carrée de a c'est le nombre réel positif dont le carré est égale à a noté $\sqrt{a}$

⇒ **Résultat:**
a un nombre réel positif

$$\boxed{\sqrt{a^2}=a \quad , \quad \sqrt{a}^2=a}$$

* **Remarques importantes:**
* $\sqrt{a}$ n'a pas de sens que si $a\geq 0$ c.à.d la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas
* La racine carrée d'un nombre n'est jamais égale à un nombre négatif.
* L'opposé de $\sqrt{a}$ (avec $a\geq 0$) est: $-\sqrt{a}$ (L'opposé de $\sqrt{11}$ est $-\sqrt{11}$)
* $\sqrt{0}=0$, $\sqrt{1}=1$

3°) Exemples:

* $\sqrt{0}=0$ car $0^2=0$
* $\sqrt{1}=1$ car $1^2=1$
* $\sqrt{9}=3$ car $3^2=9$
* $\sqrt{49}=7$ car $7^2=49$
* $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ car $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

* A apprendre par coeur: (Carrés parfaits)

* $\sqrt{0}=0$	* $\sqrt{49}=7$	* $\sqrt{169}=13$
* $\sqrt{1}=1$	* $\sqrt{64}=8$	* $\sqrt{196}=14$
* $\sqrt{4}=2$	* $\sqrt{81}=9$	* $\sqrt{225}=15$
* $\sqrt{9}=3$	* $\sqrt{100}=10$	* $\sqrt{256}=16$
* $\sqrt{16}=4$	* $\sqrt{121}=11$	* $\sqrt{289}=17$
* $\sqrt{25}=5$	* $\sqrt{144}=12$	* $\sqrt{324}=18$
* $\sqrt{36}=6$	* $\sqrt{400}=20$	* $\sqrt{361}=19$

* Exercice d'application:
* $\sqrt{144}=\sqrt{12^2}=12$
* $\sqrt{\frac{1}{9}}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}$
* $\sqrt{\frac{16}{25}}=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$
* $\frac{3}{\sqrt{81}}=\frac{3}{\sqrt{9^2}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$
* $\sqrt{\frac{0,36}{0,25}}=\sqrt{\left(\frac{0,6}{0,5}\right)^2}=\frac{0,6}{0,5}=\frac{6}{5}$
* $\frac{\sqrt{121}}{4}=\frac{\sqrt{11^2}}{4}=\frac{11}{4}$

4°) Le carré d'une racine carrée:

a_ Propriété:

a un nombre réel.
* Si $a>0$: $\sqrt{a^2}=\sqrt{a}^2=a$
* Si $a<0$: $\sqrt{a^2}=\sqrt{a}^2=-a$

b - Exemples :

* $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$
* $\sqrt{\frac{11}{5}}^2 = \frac{11}{5}$
* $\sqrt{\sqrt{9}}^2 = \sqrt{9} = 3$
* $\sqrt{(-3)^2} = 3$
* $\sqrt{\left(\frac{-6}{7}\right)^2} = \frac{6}{7}$

c - Exercice d'application :

Simplifier ce qui suit :

* $\sqrt{\sqrt{16}}$
* $\sqrt{(7+\sqrt{2})^2}$
* $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{7}}^2$
* $\sqrt{\sqrt{5}^2}^2$
* $\sqrt{7+\sqrt{2}^2}$
* $\sqrt{(-7-\sqrt{5})^2}$

Solution :

* $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{\sqrt{4^2}} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$
* $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{7}}^2 = \frac{\sqrt{2}}{7}$
* $\sqrt{7+\sqrt{2}^2} = \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$
* $\sqrt{(7+\sqrt{2})^2} = 7+\sqrt{2}$
* $\sqrt{\sqrt{5}^2}^2 = \sqrt{5}^2 = 5$
* $\sqrt{(-7-\sqrt{5})^2} = -(-7-\sqrt{5}) = 7+\sqrt{5}$

car $-7-\sqrt{5} < 0$

II - Résolution de l'équation $x^2 = a$

1°/ Si $a > 0$

L'équation $x^2 = a$ est respectivement équivalente à

$$x^2 - a = 0$$
$$x^2 - \sqrt{a}^2 = 0$$
$$(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a}) = 0$$
$$x - \sqrt{a} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{a} = 0$$
$$x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$

Cette équation admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

2°/ Si $a = 0$

L'équation $x^2 = a$ est respectivement équivalente à

$$x^2 = 0$$
$$x = 0$$

Cette équation admet unique solution 0

3°/ Si $a < 0$

L'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.

* Règle :

Solution de l'équation $x^2 = a$	Si $a = 0$	L'équation admet unique solution 0
	Si $a > 0$	L'équation admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
	Si $a < 0$	L'équation n'admet pas de solution.

4°) Exercice d'application :

Résoudre les équations suivantes :

* $2x^2 = 6$
* $-13 + x^2 = -4$
* $3x^2 + 15 = 3$
* $2(x^2 - 1) = -2$

Solution :

* L'équation $2x^2 = 6$ est respectivement équivalente à

$$x^2 = \frac{6}{2}$$
$$x^2 = 3$$
$$x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}$$

Cette équation admet deux solutions $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$

* L'équation $-13 + x^2 = -4$ est respectivement équivalente à

$$x^2 = -4 + 13$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \sqrt{9} \text{ ou } x = -\sqrt{9}$$
$$x = 3 \text{ ou } x = -3$$

Cette équation admet deux solutions 3 et -3

* L'équation $3x^2 + 15 = 3$ est respectivement équivalente à

$$3x^2 = 3 - 15$$
$$3x^2 = -12$$
$$x^2 = \frac{-12}{3}$$
$$x^2 = -4$$

Donc cette équation n'admet pas de solution.

* L'équation $2(x^2-1)=-2$ est respectivement équivalente

$$2x^2-2=-2$$
$$2x^2=-2+2$$
$$2x^2=0$$
$$x^2=0$$
$$x=0$$

La solution de cette équation est le nombre 0

III – Les opérations sur les racines carrées :

1°) Racine carrée et produit :

a – Propo ① :

Soient a et b deux nombres réels positifs.

$$\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$

* Exemples :

* $\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\sqrt{2\times6}=\sqrt{12}$
* $\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{3\times12}=\sqrt{36}=6$
* $\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times-\sqrt{10}=-\sqrt{2\times5\times10}=-\sqrt{100}=-10$
* $\sqrt{125}=\sqrt{25\times5}=\sqrt{25}\times\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

b – propo ② : Extraire un carré parfait.

Soient a et b deux nombres réels positifs non nuls

$$\sqrt{a^2\times b}=a\sqrt{b}$$

* Exemples :

* $\sqrt{3^2\times7}=3\sqrt{7}$
* $\sqrt{25\times7}=\sqrt{5^2\times7}=5\sqrt{7}$
* $\sqrt{49\times5}=\sqrt{7^2\times5}=7\sqrt{5}$
* $\sqrt{8}=\sqrt{4\times2}=\sqrt{2^2\times2}=2\sqrt{2}$
* $\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}=\sqrt{3^2\times5}=3\sqrt{5}$
* $\sqrt{2^2\times5^2\times3}=2\times5\sqrt{3}=10\sqrt{3}$
* $\sqrt{3^2\times7}\times\sqrt{2^2\times3}=3\sqrt{7}\times2\sqrt{3}=3\times2\sqrt{7\times3}=6\sqrt{21}$
* $\sqrt{5^3}=\sqrt{5^2\times5}=5\sqrt{5}$

* Techniques et astuces :

1°) Décomposition :

Simplifions $\sqrt{180}$, pour cela on décompose 180

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

donc $180=2^2\times3^2\times5$

donc $\sqrt{180}=\sqrt{2^2\times3^2\times5}$
$=2\times3\sqrt{5}$
$=6\sqrt{5}$

2°) Racines carrées et puissances :

$A=\sqrt{5^6}=\sqrt{(5^3)^2}=5^3=125$

$B=\sqrt{7^5}=\sqrt{7^4\times7}=\sqrt{(7^2)^2\times7}=7^2\sqrt{7}=49\sqrt{7}$

c – Exercice d'application :

Simplifier et calculer

$a=\sqrt{3^4\times5^2\times2^7}$

$b=\sqrt{2^2+3^2+6^2}$

$c=(3\sqrt{2}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}-\sqrt{5})$

$d=\sqrt{25}+\sqrt{81}-2\sqrt{9}$

$e=\sqrt{96}+2\sqrt{24}-3\sqrt{54}$

→ Solution :

$a=\sqrt{3^4\times5^2\times2^7}$
$=\sqrt{(3^2)^2\times5^2\times2^6\times2}$
$=\sqrt{3^2\times5^2\times(2^3)^2\times2}$
$=3\times5\times2^3\sqrt{2}$
$a=120\sqrt{2}$

$b=\sqrt{2^2+3^2+6^2}$
$=\sqrt{4+9+36}=\sqrt{49}=\sqrt{7^2}=7$

$c=(3\sqrt{2}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}-\sqrt{5})$
$=(3\sqrt{2})^2-\sqrt{5}^2$
$=9\times2-5$
$=18-5=13$

$d=\sqrt{25}+\sqrt{81}-2\sqrt{9}$
$=\sqrt{5^2}+\sqrt{9^2}-2\sqrt{3^2}$
$=5+9-2\times3=14-6=8$

$$e = \sqrt{96} + 2\sqrt{24} - 3\sqrt{54}$$
$$= \sqrt{16\times6} + 2\sqrt{4\times6} - 3\sqrt{9\times6}$$
$$= \sqrt{4^2\times6} + 2\sqrt{2^2\times6} - 3\sqrt{3^2\times6}$$
$$= 4\sqrt{6} + 2\times2\sqrt{6} - 3\times3\sqrt{6}$$
$$= (4+4-9)\sqrt{6} = -\sqrt{6}$$

2/ Racine carrée et division :

a_ Propo ①:

Soient a et b deux nombres réels positifs et $b \neq 0$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

* Exemples :

* $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$
* $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$
* $\sqrt{\frac{3}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$
* $-\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{5}} = -\sqrt{\frac{60}{5}} = -\sqrt{12} = -\sqrt{2^2\times3} = -2\sqrt{3}$

b_ propo ②:

Soient a et b deux nombres réels positifs et $b \neq 0$

$$\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b} \qquad \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

* Exemples :

* $\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$
* $\sqrt{\frac{1}{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$
* $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ * $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$
* $\sqrt{\frac{7}{5}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}\times\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{35}}{5}$

3/ Suppression de la racine du dénominateur (Rendre le dénominateur rationnel)

a_ Cas ① : Dénominateur ne contenant pas + ou − :

* $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
* $\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{5\times2} = \frac{\sqrt{6}}{10}$
* $\frac{2+\sqrt{7}}{3\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}(2+\sqrt{7})}{3\times11} = \frac{2\sqrt{11}+\sqrt{77}}{33}$

b_ Cas ② : Dénominateur contenant + et −

Définition : Le conjugué

a et b deux nombres réels positifs strictement

Le conjugué de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

Le conjugué de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

On dit que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ sont conjugués entre eux

et $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = \sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2 = a - b$

* Exemples :

* $\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{3\times(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}$

$$= \frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{\sqrt{2}^2-\sqrt{5}^2} = \frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{2-5}$$

$$= \frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{-3} = -(\sqrt{2}-\sqrt{5}) = \sqrt{5}-\sqrt{2}$$

* $\frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}(4+\sqrt{6})}{(4-\sqrt{6})(4+\sqrt{6})}$

$$= \frac{4\sqrt{3}+\sqrt{18}}{4^2-\sqrt{6}^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}+\sqrt{3^2\times2}}{16-6}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{10}$$