

LES RACINES CARRÉES

1

Objectifs d'apprentissage

- ✓ Connaître que si 'a' désigne un nombre positif, \sqrt{a} est le nombre positif dont le carré est 'a'.
- ✓ Connaître et utiliser les égalités $\sqrt{a^2} = a$ et $(\sqrt{a})^2 = a$ où 'a' est un nombre positif.
- ✓ Utiliser les égalités : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ où a et b sont deux nombres positifs et $b \neq 0$ dans le dernier cas.
- ✓ Déterminer les nombres x tels que : $x^2 = a$
- ✓ Rendre rationnel le dénominateur d'un nombre réel.

Gestion du temps

🕒 10 heures

Prérequis

- ⊗ Effectuer des calculs sur des nombres rationnels.
- ⊗ Puissances d'un nombre rationnel.
- ⊗ Equations.
- ⊗ Théorème de Pythagore

Outils didactiques

- ♣ Tableau.
- ♣ Livre scolaire.
- ♣ Calculatrice.

◆ Pr : Abdelilah BOUTAYEB

KKK 'D7 %'A 5

◆ Matière : Mathématiques

◆ Niveau : 3^{ème} APIC

◆ Etablissement : Collège Nahda

Activités

Activité 1 : 1) Calcule ce qui suit : 3^2 , 8^2 , $(4/7)^2$, $(-2)^2$. ***** 2) Ecris sous forme d'une puissance : 25, 100, 36.

Activité 2 : 1) Trouve x tel que: $x^2=81$
2) Complète le tableau à l'aide d'une calculatrice :

a	4	6	3	11
a^2
$\sqrt{a^2}$

3) D'après le tableau qu'est-ce que vous observez ?

Activité 3 : 1) Calculez $\sqrt{4 \times 9}$ et $\sqrt{4} \times \sqrt{9}$. Qu'est-ce que vous observez ?

2) Calculez $\sqrt{\frac{4}{9}}$ et $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$. Qu'est-ce que vous observez ?

3) Calculez $\sqrt{4+9}$ et $\sqrt{4} + \sqrt{9}$. Qu'est-ce que vous observez ?

Activité 4 : 1) Montrez que : $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

Contenu de la leçon

I- Notion de racine carrée :

***Définition :** Soit a un nombre positif. La racine carrée de a, noté \sqrt{a} , est le nombre positif dont le carré est a.

Le symbole $\sqrt{\quad}$ est appelé « radical »

***Règle :** Quel que soit a un nombre positif, on a : $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$.

***Exemples :** $\sqrt{7^2} = 7$; $(\sqrt{13})^2 = 13$; $(\sqrt{\frac{6}{15}})^2 = \frac{6}{15}$; $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$;

$$\sqrt{\frac{36}{81}} = \sqrt{\frac{6^2}{9^2}} = \sqrt{(\frac{6}{9})^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} ; \quad \sqrt{1} = 1 ; \quad \sqrt{0} = 0$$

***Remarque :** La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas. \rightarrow
 ~~$\sqrt{-9}$~~ ; ~~$\sqrt{-37}$~~

II- Racines carrées et opérations :

1) Multiplication de racine carrée :

***Propriété 1 :** Soient a et b deux nombres positifs, on a :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}.$$

***Exemples :** $\sqrt{3} \times \sqrt{7} = \sqrt{3 \times 7} = \sqrt{21}$; $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

2) Quotient de racine carrée :

***Propriété 2 :** Soient a et b deux nombres positifs avec $b \neq 0$, on a :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

***Exemples :** $\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5}$; $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$

III- Rendre rationnel le dénominateur d'un nombre réel :

1) Première cas :

$$* \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2 \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{(\sqrt{7})^2} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

Evaluation

Exercice 1 : Calcule ce qui suit : $\sqrt{16}$; $\frac{4}{\sqrt{36}}$; $\sqrt{21^2}$; $\sqrt{(-49)^2}$; $\frac{\sqrt{0.25}}{\sqrt{0.04}}$

Exercice 2 : Calcule ce qui suit : $5\sqrt{9}$; $-7\sqrt{(-4)^2}$; $\frac{\sqrt{9+\sqrt{81}}}{\sqrt{49}}$;

$$\sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{9 + \sqrt{49}}}}$$

Exercice 3 : Simplifiez ce qui suit : $\sqrt{27}$; $\sqrt{50}$; $-\sqrt{48}$; $\sqrt{2} \times \sqrt{32}$; $\sqrt{\frac{4}{81}}$; $\sqrt{\frac{8}{18}}$; $\sqrt{\frac{9}{7}} \times \sqrt{7}$

Exercice 4 : Ecris chaque nombre sous la forme $a\sqrt{2}$ où a est un entier : $\sqrt{18}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{200}$; $\sqrt{72}$

Exercice 5 : Réduis ce qui suit :

$$7\sqrt{3} - \sqrt{27} + 2\sqrt{12} ; \quad \sqrt{24} + 7\sqrt{6} - 2\sqrt{54} ;$$

$$4\sqrt{7} - 8\sqrt{28} + \sqrt{700} ; \quad 2\sqrt{18} + \sqrt{32} + 3\sqrt{2}$$

Exercice 6 : Réduis ce qui suit :

$$\sqrt{20} + 2\sqrt{45} - 3\sqrt{80} ; \quad \sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{27} ;$$

$$3\sqrt{8} + \sqrt{50} + 2\sqrt{32} ; \quad \sqrt{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{\frac{8}{27}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{50}{12}}$$

Activités

Activité 5 : 1) Développer ce qui suit :
 (2-a)(2+a) ; (3+4a)(3-4a)

2) Montrez que : $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$

Activité 6 : Trouvez x tel que : $x^2=9$;
 $x^2=6$; $x^2=0$; $x^2=-4$

Contenu de la leçon

$$** \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3 \times \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2 \times (\sqrt{5})^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2 \times 5} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

$$*** \frac{2+\sqrt{5}}{7\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{5}) \times \sqrt{3}}{7\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2 \times \sqrt{3} + \sqrt{5} \times \sqrt{3}}{7 \times (\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{15}}{7 \times 3} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{15}}{21}$$

2) Deuxième cas : Utilisation du conjugué

✓ **N.B :** Le conjugué de (a+b) est (a-b), et le conjugué de (a-b) est (a+b).

$$* \frac{2}{5-\sqrt{3}} = \frac{2 \times (5+\sqrt{3})}{(5-\sqrt{3}) \times (5+\sqrt{3})} = \frac{2 \times 5 + 2 \times \sqrt{3}}{5^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{10 + 2\sqrt{3}}{25-3} = \frac{10 + 2\sqrt{3}}{22}$$

$$** \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}+1} = \frac{\sqrt{6} \times (\sqrt{7}-1)}{(\sqrt{7}+1) \times (\sqrt{7}-1)} = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{7} - \sqrt{6} \times 1}{(\sqrt{7})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{42} - \sqrt{6}}{7-1} = \frac{\sqrt{42} - \sqrt{6}}{6}$$

IV- Résolution d'équation $x^2 = a$:

***Règle :** - Si $a > 0$, alors l'équation a deux solutions sont : \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$.

- Si $a = 0$, alors la solution de l'équation est 0.

- Si $a < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.

***Exemples :** Résolvez les équations suivantes : $x^2=11$; $x^2=-8$; $x^2=0$

* On a : $x^2=11$

Alors : $x=\sqrt{11}$ ou $x=-\sqrt{11}$

Donc l'équation a deux solutions sont : $\sqrt{11}$ et $-\sqrt{11}$

** On a : $x^2=-8$

Donc l'équation n'a pas de solution car : $-8 < 0$

*** On a : $x^2=0$

Donc la solution de l'équation est : 0

KKK 'D7 %'A 5

Evaluation

Exercice 7 : Eliminer le radical du dénominateur des fractions suivantes :

$$\frac{3}{\sqrt{11}} ; \frac{10}{2\sqrt{5}} ; \frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}} ; \frac{-2\sqrt{3}}{5\sqrt{6}}$$

Exercice 8 : Eliminer le radical du dénominateur des fractions suivantes :

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1} ; \frac{2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} ; \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} ; \frac{14}{3\sqrt{3}+2\sqrt{5}} ;$$

$$\frac{5}{\sqrt{7}-2} - \frac{2}{\sqrt{7}} ; \frac{3+\sqrt{5}}{7+\sqrt{5}} - \frac{3-\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}} ; \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Exercice 9 : Résolvez les équations suivantes : $x^2-25=0$; $x^2+9=0$; $5+x^2=5$;
 $4x^2=16$; $\frac{x^2}{4} = 5$; $9x^2-8=0$; $3x^2+4=0$;
 $2x^2=6$; $\frac{2x^2}{3} = 4$