Chapitre ⑥ : Ordre et opérations

Comparaison de deux nombres réels

Règle
* Si $a-b \leq 0$ alors $a \leq b$
* Si $a-b \geq 0$ alors $a \geq b$

càd, pour comparer deux nombres réels, on étudie le signe de leur différence

Exemple $a = \frac{4}{35}$ et $b = \frac{2}{15}$

* $a-b = \frac{4}{35} - \frac{2}{15} = \frac{12-14}{105} = \frac{-2}{105}$

Comme $\frac{-2}{105} < 0$ donc $a-b<0$

Alors $a<b$

Ordre et opérations

→ **ordre et addition**

propo ①

$a \leq b$ signifie que $a+c \leq b+c$

$a+c \leq b+c$ signifie que $a \leq b$

propo ②

$a \leq b$, $c \leq d$ signifie que $a+c \leq b+d$

→ **ordre et multiplication**

propo ③

* $a \leq b$ et $k>0$ signifie que $a \times k \leq b \times k$
* $a \leq b$ et $k<0$ signifie que $a \times k \geq b \times k$

La multiplication par un nombre positif ne change pas l'ordre, mais la multiplication par un nombre négatif change l'ordre

propo ④

a, b, c et d nombres positifs

$a \leq b$, $c \leq d$ signifie que $a \times c \leq b \times d$

→ **Ordre et inverse**

propo ⑤

a, b positifs

$a \leq b$ signifie que $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

l'inverse change l'ordre

→ **Ordre et carré et racine carré**

propo ⑥

a et b positifs

* $a \leq b$ signifie que $a^2 \leq b^2$
* $a \leq b$ signifie que $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

*** Exemples:**

Exemple ①: Comparons $2\sqrt{2}$ et $\sqrt{7}$

On a $\begin{cases} (2\sqrt{2})^2 = 8 \\ \sqrt{7}^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{7}^2 \leq (2\sqrt{2})^2$

alors $\sqrt{7} < 2\sqrt{2}$

*** Exemple ②:**

Comparons $-2\sqrt{5}$ et $-3\sqrt{2}$

$\begin{cases} (-2\sqrt{5})^2 = 20 \\ (-3\sqrt{2})^2 = 18 \end{cases} \Rightarrow (-3\sqrt{2})^2 \leq (-2\sqrt{5})^2$

$\Rightarrow -3\sqrt{2} > -2\sqrt{5}$

Car $-3\sqrt{2}$ et $-2\sqrt{5}$ négatifs

*** Exemple:** $2 \leq x \leq 3$ et $-4 \leq y \leq -3$

Encadrement de $x+y$

On a $2 \leq x \leq 3$
$-4 \leq y \leq -3$
$2+(-4) \leq x+y \leq 3+(-3)$
$-2 \leq x+y \leq 0$

$x-y$
$-4 \leq y \leq -3$
$3 \leq -y \leq 4$
$2+3 \leq x+(-y) \leq 3+4$
$5 \leq x-y \leq 7$

$x \times y$
$2 \leq x \leq 3$
$3 \leq -y \leq 4$
$2 \times 3 \leq x \times (-y) \leq 3 \times 4$
$6 \leq -xy \leq 12$
$-12 \leq xy \leq -6$

$\frac{x}{y}$
$-4 \leq y \leq -3$
$3 \leq -y \leq 4$
$\frac{1}{4} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{3}$
$2 \leq x \leq 3$
$2 \times \frac{1}{4} \leq x \times -\frac{1}{y} \leq 3 \times \frac{1}{3}$
$\frac{1}{2} \leq -\frac{x}{y} \leq 1$
$-1 \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{1}{2}$

Encadrement

*** Encadrement d'une somme**

$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \Rightarrow a+c \leq x+y \leq b+d$

*** Encadrement d'opposé**

$a \leq x \leq b \Rightarrow -b \leq -x \leq -a$

*** Encadrement d'une différence**

$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \Rightarrow a-d \leq x-y \leq b-c$

On a $a-b = a+(-b)$ donc pour encadrer $a-b$ on encadre d'abord $-b$ après on applique la propo de la somme.

*** Encadrement d'un produit**

On considère tous les nombres positifs

$\begin{matrix} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{matrix} \Rightarrow a \times c \leq x \times y \leq b \times d$

tous les nombres doivent être positifs, sinon on encadre l'opposé pour les rendre positifs

*** Encadrement d'un inverse**

$a \leq x \leq b \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$

*** Encadrement d'un quotient**

On considère tous les nombres positifs

$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$

On a $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$, pour encadrer $\frac{a}{b}$, on encadre d'abord $\frac{1}{b}$ après on applique la règle du produit

Rédigé par: Mr BENNASSER Jamal